

MATEMATIKA – PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Kuželosečky

- 1** Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0.$$

- a** Napište parametrický popis této křivky.
b Napište obecné rovnice tečen křivky v jejích průsečících s osou x .

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + 6 &= 0 \\(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 6 &= 0 \\(x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 4\end{aligned}$$

Křivka je kružnice se středem $S[3; -1]$ a poloměrem $r = 2$.

- a** Jeden z možných parametrických popisů této kružnice je

$$k(t) = [3 + 2 \cdot \cos t; -1 + 2 \cdot \sin t], t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Počáteční bod parametrizace je $[5; -1]$, orientace kružnice je kladná (tj. parametr probíhá kružnici proti směru otáčení hodinových ručiček).

- b** Pro určení průsečíků kružnice s osou x můžeme využít např. její parametrické rovnice.

$$\begin{aligned}-1 + 2 \sin t &= 0 \\ \sin t &= \frac{1}{2} \\ t &\in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}\end{aligned}$$

Průsečíky s osou x jsou body $P = k\left(\frac{\pi}{6}\right) = [3 + \sqrt{3}; 0]$ a $Q = k\left(\frac{5\pi}{6}\right) = [3 - \sqrt{3}; 0]$.

Směrové vektory tečen kružnice jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = (-2 \sin t; 2 \cos t), t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

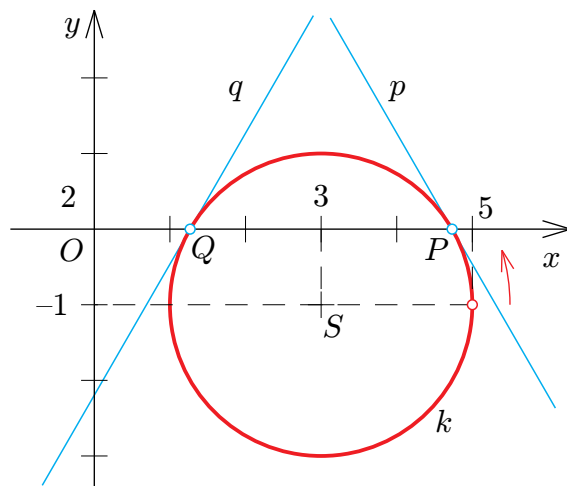
Směrový vektor tečny kružnice v bodě P je $u\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1; \sqrt{3})$, směrový vektor tečny kružnice v bodě Q je $u\left(\frac{5\pi}{6}\right) = (-1; -\sqrt{3})$.

Tečna p kružnice v bodě P má obecnou rovnici

$$p: \sqrt{3}x + y - 3(\sqrt{3} + 1) = 0.$$

Tečna q kružnice v bodě Q má obecnou rovnici

$$q: \sqrt{3}x - y - 3(\sqrt{3} - 1) = 0.$$



2 Kružnice má střed $S[-2 ; 3]$ a prochází bodem $Q[-3 ; 6]$

- a** Napište parametrický předpis dané kružnice. Počáteční bod parametrizace nechť je bod Q , orientace záporná (tj. parametr bude probíhat kružnici po směru otáčení hodinových ručiček).
- b** Napište obecnou rovnici dané kružnice ve středovém tvaru.
- c** Určete souřadnice průsečíků kružnice se souřadnicovými osami.

Řešení

Parametrický popis kružnice se středem $S[m ; n]$, procházející bodem $Q[p ; q]$, s počátečním bodem parametrizace Q a se zápornou orientací je

$$k(t) = [m + (p - m) \cos t + (q - n) \sin t ; n + (q - n) \cos t - (p - m) \sin t], t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

a Dosazením hodnot

$$m = -2, n = 3, p - m = -1, q - n = 3$$

do uvedeného vztahu získáme parametrický popis zadané kružnice:

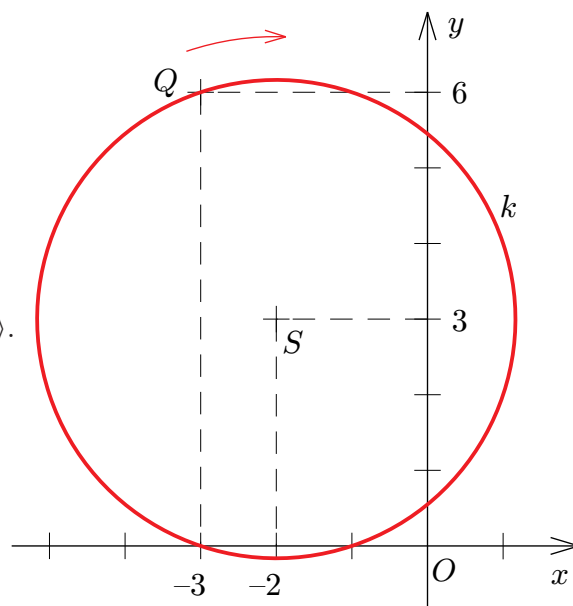
$$k(t) = [-2 - \cos t + 3 \sin t ; 3 + 3 \cos t + \sin t], t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

b Poloměr kružnice je velikost úsečky SQ , tedy

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Rovnice kružnice ve středovém tvaru je

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$



c Souřadnice průsečíků kružnice s osou y získáme dosazením $x = 0$ do obecné rovnice kružnice.

$$\begin{aligned} 4 + (y - 3)^2 &= 10 \\ y^2 - 6y + 3 &= 0 \\ y &\in \{3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}\} \end{aligned}$$

Průsečíky kružnice s osou y jsou body $[0, 3 - \sqrt{6}]$ a $[0, 3 + \sqrt{6}]$.

Souřadnice průsečíků kružnice s osou x získáme dosazením $y = 0$ do obecné rovnice kružnice.

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 + 9 &= 10 \\ x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ x &\in \{-3 ; -1\} \end{aligned}$$

Průsečíky kružnice s osou x jsou body $[-3 ; 0]$ a $[-1 ; 0]$.

3 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

- a** Napište parametrický popis této křivky.
b napište obecné rovnice tečen křivky, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x + 3y + 5 = 0$.

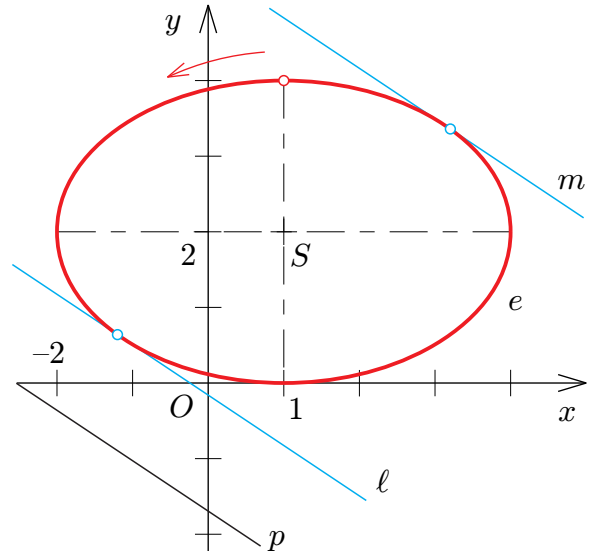
Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 - 36 &= 0 \\ \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je elipsa se středem $S[1; 2]$, hlavní osa je přímka $y = 2$, vedlejší osa je přímka $x = 1$, velikost hlavní poloosy $a = 3$, velikost vedlejší poloosy $b = 2$.

Ohniska elipsy jsou body $E[1-\sqrt{5}; 2]$ a $F[1+\sqrt{5}; 2]$. Vrcholy jsou body $[4; 2]$, $[1; 4]$, $[-2; 2]$ a $[1; 0]$.



a Jeden z možných parametrických popisů této elipsy je

$$k(t) = [1 - 3 \sin t; 2 + 2 \cos t], \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Počáteční bod parametrizace je bod $[1; 4]$, orientace kladná.

b Směrové vektory tečen elipsy jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = (-3 \cos t; -2 \sin t), \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Směrový vektor tečny elipsy, která je rovnoběžná s přímkou p , je kolmý na normálový vektor $\vec{n}_p = (2, 3)$.

Vektory jsou kolmé právě tehdy, když jejich skalární součin je roven nule. Pro určení hodnot parametru t , pro které je vektor $u(t)$ kolmý k vektoru $\vec{n}_p$, tedy řešíme rovnici

$$\begin{aligned} u(t) \cdot \vec{n}_p &= 0 \\ (-3 \cos t; -2 \sin t) \cdot (2; 3) &= 0 \\ -6 \cos t - 6 \sin t &= 0 \\ -\cos t &= \sin t \\ \cot g t &= -1, \quad \sin t \neq 0 \\ t &\in \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

Tečna ℓ elipsy je určena bodem $k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 2 - \sqrt{2}\right]$ a směrovým vektorem $u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right)$. Normálový vektor tečny ℓ je $(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}) \sim (2; 3)$.

Obecná rovnice tečny ℓ je: $2x + 3y - 8 + 6\sqrt{2} = 0$.

Tečna m elipsy je určena bodem $k\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 2 + \sqrt{2}\right]$ a směrovým vektorem $u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$. Normálový vektor tečny m je $(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}) \sim (2; 3)$.

Obecná rovnice tečny m je: $2x + 3y - 8 - 6\sqrt{2} = 0$.

4 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$9x^2 - 4y^2 + 36x + 24y - 36 = 0.$$

- a** Napište parametrický popis této křivky.
b Spočítejte souřadnice průsečíků této křivky se souřadnicovými osami.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} 9(x+2)^2 - 4(y-3)^2 - 36 &= 0 \\ \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je hyperbola se středem $S[-2; 3]$, hlavní osa je přímka $y = 3$, vedlejší osa je přímka $x = -2$, velikost hlavní poloosy $a = 2$, velikost vedlejší poloosy $b = 3$.

Ohniska hyperboly jsou body $E[-2 - \sqrt{13}; 3]$ a $F[-2 + \sqrt{13}; 3]$.

Vrcholy jsou body $[0; 3]$ a $[-4; 3]$.

Asymptoty hyperboly jsou přímky a_1, a_2 s obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} a_1: 3x - 2y + 12 &= 0 \\ a_2: 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

- a** Parametrický popis této hyperboly je
 $k(t) = [-2 \pm 2 \cosh t; 3 + 3 \sinh t]$,
 $t \in \mathbb{R}$.

- b** Souřadnice průsečíků s osami určíme z obecné rovnice hyperboly dosazením $x = 0$ pro průsečíky s osou y a dosazením $y = 0$ pro průsečíky s osou x .

Pro určení průsečíků s osou y tedy řešíme rovnici:

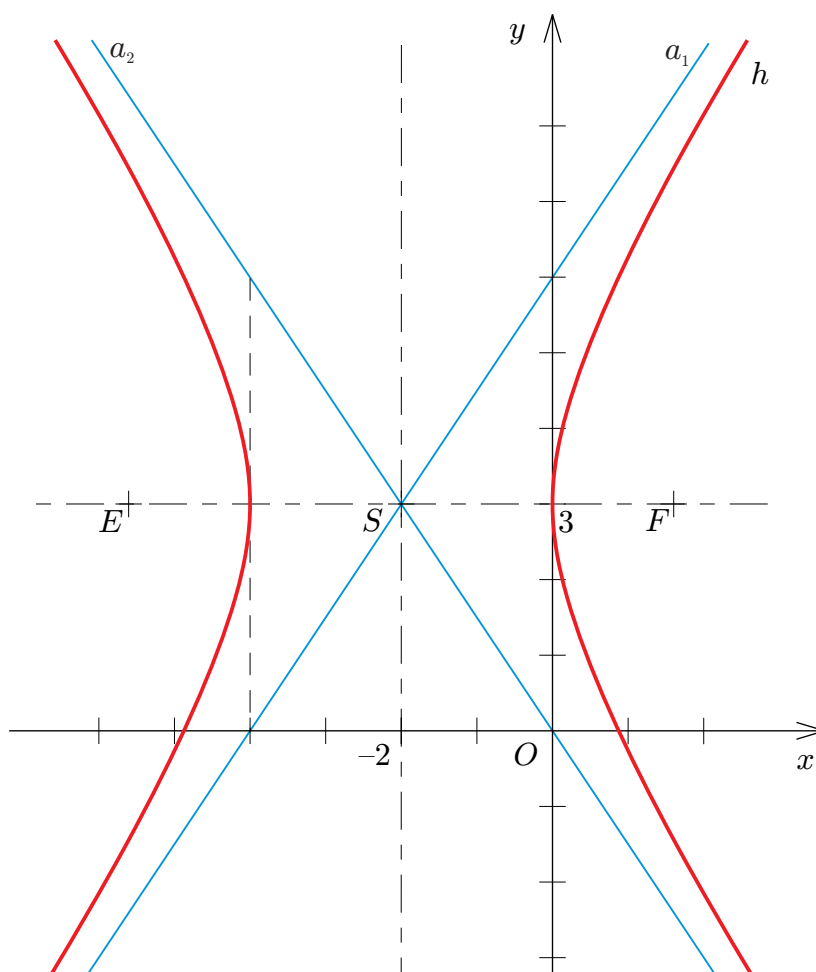
$$\begin{aligned} -4y^2 + 24y - 36 &= 0 \\ y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ (y-3)^2 &= 0 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Průsečík hyperboly s osou y je bod $[0; 3]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36x - 36 &= 0 \\ x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Průsečíky hyperboly s osou x jsou body $[-2 - 2\sqrt{2}; 0]$ a $[-2 + 2\sqrt{2}; 0]$.



5 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$-9x^2 + 9y^2 + 18x + 36y - 414 = 0.$$

- a** Napište parametrický popis této křivky.
b Spočítejte souřadnice průsečíků této křivky se souřadnicovými osami.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} -9(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 441 &= 0 \\ -\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y+2)^2}{49} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je rovnoosá hyperbola se středem $S[1; -2]$, hlavní osa je přímka $x = 1$, vedlejší osa je přímka $y = -2$, velikost hlavní i vedlejší poloosy $a = b = 7$.

Ohniska této hyperboly jsou body $E[1; -2 - 7\sqrt{2}]$ a $F[1; -2 + 7\sqrt{2}]$.

Vrcholy jsou body $[1; -9]$ a $[1; 5]$.

Asymptoty hyperboly jsou přímky a_1, a_2 s obecnými rovnicemi:

$$\begin{aligned} a_1 : x - y - 3 &= 0 \\ a_2 : x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

a Parametrický popis této hyperboly je:

$$h(t) = [1 + 7 \sinh t; -2 \pm 7 \cosh t], t \in \mathbb{R}.$$

b Souřadnice průsečíků s osami určíme z obecné rovnice hyperboly dosazením $x = 0$ pro průsečíky s osou y a dosazením $y = 0$ pro průsečíky s osou x .

Pro určení průsečíků s osou y tedy řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 9y^2 + 36y - 414 &= 0 \\ y^2 + 4y - 46 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{-4 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Průsečíky hyperboly s osou y jsou body $[0; -2 - 5\sqrt{2}]$ a $[0; -2 + 5\sqrt{2}]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} -9x^2 + 18x - 414 &= 0 \\ x^2 - 2x + 46 &= 0 \\ x &\in \emptyset \end{aligned}$$

Hyperbola nemá průsečík s osou x .

- 6** Hyperbola má střed $S[3; 2]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou x , velikost hlavní poloosy je $a = 3$, velikost vedlejší poloosy je $b = 4$.
- a** Určete souřadnice vrcholů a ohnisek hyperboly a napište obecné rovnice asymptot hyperboly.
- b** Sestavte obecnou rovnici hyperboly ve středovém tvaru.
- c** Napište parametrický popis hyperboly.
- d** Určete souřadnice průsečíků hyperboly se souřadnicovými osami.

Řešení

- a** Velikost excentricity hyperboly je $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$. Ohniska hyperboly jsou body $E[-2; 2]$ a $F[8; 2]$.
Vrcholy hyperboly jsou body $[0; 2]$ a $[6; 2]$.

Asymptoty hyperboly jsou přímky a_1, a_2 s obecnými rovnicemi:

$$a_1: 4x - 3y - 6 = 0$$

$$a_2: 4x + 3y - 18 = 0$$

b

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

- c** S využitím vztahu platného pro hyperbolické funkce odvodíme parametrický popis jedné větve hyperboly.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 - \left(\frac{y-2}{4}\right)^2 &= 1 \\ (\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{3} &= \cosh t & \frac{y-2}{4} &= \sinh t \\ x &= 3 + 3 \cosh t & y &= 2 + 4 \sinh t \end{aligned}$$

Parametrický popis dané hyperboly je

$$h(t) = [3 \pm 3 \cosh t; 2 + 4 \sinh t], t \in \mathbb{R}$$

(znaménko $+$ u $\cosh t$ pro pravou větev hyperboly, znaménko $-$ pro levou větev).

- d** Souřadnice průsečíků s osami určíme z obecné rovnice hyperboly dosazením $x = 0$ pro průsečíky s osou y a dosazením $y = 0$ pro průsečíky s osou x .

Pro určení průsečíků s osou y tedy řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(y-2)^2}{16} &= 1 \\ (y-2)^2 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Průsečík hyperboly s osou y je bod $[0; 2]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{1}{4} &= 1 \\ 4x^2 - 24x - 9 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{24 \pm \sqrt{720}}{8} = \frac{24 \pm \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 5}}{8} = \frac{24 \pm 12\sqrt{5}}{8} = 3 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Průsečíky hyperboly s osou x jsou body $\left[3 - \frac{3\sqrt{5}}{2}; 0\right]$ a $\left[3 + \frac{3\sqrt{5}}{2}; 0\right]$.

7 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$4x^2 + y^2 - 32x + 4y + 52 = 0.$$

- a** Napište parametrické vyjádření této kuželosečky.
- b** Určete souřadnice průsečíků kuželosečky s osou x .
- c** Napište obecné rovnice tečen kuželosečky v jejích průsečících s přímkou $p: 2x + y - 6 = 0$.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} 4(x-4)^2 + (y+2)^2 - 16 &= 0 \\ \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je elipsa se středem $S[4; -2]$, hlavní osa je přímka $x = 4$, vedlejší osa je přímka $y = -2$, velikost hlavní poloosy $a = 4$, velikost vedlejší poloosy $b = 2$.

Velikost excentricity je $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. Ohniska elipsy jsou body $E[4; -2 - 2\sqrt{3}]$ a $F[4; -2 + 2\sqrt{3}]$.

a Jeden z možných parametrických popisů elipsy je

$$e(t) = [4 + 2 \cos t; -3 + 4 \sin t], t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Počáteční bod parametrizace je bod $[6; -2]$, orientace kladná.

b Průsečíky s osou x můžeme spočítat z parametrického vyjádření:

$$\begin{aligned} -2 + 4 \sin t &= 0 \\ \sin t &= \frac{1}{2} \\ t &\in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Průsečíky elipsy s osou x jsou body $k\left(\frac{\pi}{6}\right) = [4 + \sqrt{3}; 0]$ a $k\left(\frac{5\pi}{6}\right) = [4 - \sqrt{3}; 0]$.

c Průsečíky elipsy s přímkou p získáme např. kombinací parametrického popisu elipsy a obecné rovnice přímky. Dosadíme jednotlivé souřadnicové funkce parametrického popisu elipsy za x a y do obecné rovnice přímky a vyřešíme vzniklou goniometrickou rovnici.

$$\begin{aligned} p: \quad 2x + y - 6 &= 0 \\ p \cap e: \quad 2(4 + 2 \cos t) + (-2 + 4 \sin t) - 6 &= 0 \\ 4 \cos t + 4 \sin t &= 0 \\ -1 &= \operatorname{tg} t, \quad \cos t \neq 0 \\ t &\in \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

Průsečíky elipsy s přímkou p jsou body $k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = [4 - \sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}]$ a $k\left(\frac{7\pi}{4}\right) = [4 + \sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}]$.

Směrové vektory tečen elipsy jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = (-2 \sin t; 4 \cos t), t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Směrové vektory tečen elipsy v jejích průsečících s přímkou p jsou $u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) \sim (1; 2)$ a $u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \sim (1; 2)$.

Tečny elipsy v jejích průsečících s přímkou p mají obecné rovnice:

$$\begin{aligned} 2x - y - 10 + 4\sqrt{2} &= 0, \\ 2x - y - 10 - 4\sqrt{2} &= 0. \end{aligned}$$

8 Parabola je určena vrcholem $V[-1 ; 2]$ a řídící přímkou $d : y = 3$.

- a** Určete souřadnice ohniska a sestavte obecnou rovnici paraboly ve vrcholovém tvaru.
- b** Napište parametrické vyjádření paraboly.
- c** Určete souřadnice průsečíků paraboly se souřadnicovými osami.
- d** Napište obecné rovnice tečen paraboly v jejích průsečících se souřadnicovými osami.

a Parametr paraboly je $p = 2$, ohnisko je bod $F[-1 ; 1]$, osa je přímka $o : x = -1$.

Obecná rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru je:

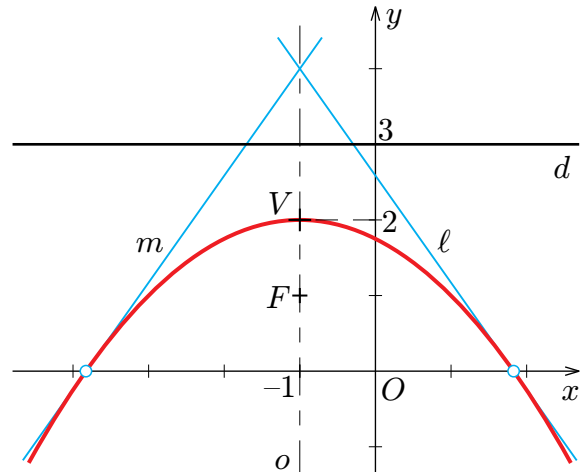
$$(x + 1)^2 = -4(y - 2).$$

b Zvolíme parametr $t = x + 1$. Z obecné rovnice poté vyjádříme x a y :

$$\begin{aligned} x &= t - 1 \\ -4(y - 2) &= t^2 \\ y &= -\frac{t^2}{4} + 2 \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření dané paraboly je:

$$k(t) = \left[t - 1 ; -\frac{t^2}{4} + 2 \right], t \in \mathbb{R}.$$



c Průsečíky paraboly se souřadnicovými osami určíme z parametrického vyjádření. Pro určení průsečíků s osou y řešíme rovnici:

$$t - 1 = 0$$

$$t = 1$$

Průsečík paraboly s osou y je bod $k(1) = [0 ; \frac{7}{4}]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$-\frac{t^2}{4} + 2 = 0$$

$$t^2 = 8$$

$$|t| = 2\sqrt{2}$$

Průsečíky paraboly s osou x jsou body $k(-2\sqrt{2}) = [-2\sqrt{2} - 1 ; 0]$ a $k(2\sqrt{2}) = [2\sqrt{2} - 1 ; 0]$.

d Směrové vektory tečen paraboly jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = \left(1 ; -\frac{t}{2} \right), t \in \mathbb{R}.$$

Směrový vektor tečny paraboly v jejím průsečíku s osou y je vektor $u(1) = (1 ; -\frac{1}{2}) \sim (2 ; -1)$.

Obecná rovnice tečny paraboly v jejím průsečíku s osou y je

$$x + 2y - \frac{7}{2} = 0.$$

Směrové vektory tečen paraboly v jejích průsečících s osou x jsou $u(-2\sqrt{2}) = (1 ; \sqrt{2})$ a $u(2\sqrt{2}) = (1 ; -\sqrt{2})$.

Obecné rovnice tečen paraboly v jejích průsečících s osou x jsou:

$$\ell : \sqrt{2}x + y - 4 + \sqrt{2} = 0,$$

$$m : -\sqrt{2}x + y - 4 - \sqrt{2} = 0.$$

9 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$y^2 + 3x + 2y - 14 = 0.$$

- a** Napište parametrické vyjádření této křivky.
b Určete souřadnice průsečíků křivky se souřadnicovými osami.
c Napište obecnou rovnici tečny křivky, která je rovnoběžná s přímkou $q : 3x - 2y + 10 = 0$.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné y a následně úpravu na vrcholový tvar.

$$\begin{aligned}(y + 1)^2 + 3x - 15 &= 0 \\ (y + 1)^2 &= -3(x - 5)\end{aligned}$$

Křivka je parabola s vrcholem $V[5 ; -1]$, osa je přímka $y = -1$, parametr je $p = \frac{3}{2}$, ohnisko paraboly je bod $F[4\frac{1}{4} ; -1]$, řídící přímka je $d : x = 5\frac{3}{4}$.

a Provedeme volbu parametru $t = y + 1$ a následně vyjádříme x z obecné rovnice:

$$\begin{aligned}y &= t - 1 \\ -3(x - 5) &= t^2 \\ x &= -\frac{t^2}{3} + 5\end{aligned}$$

Parametrické vyjádření paraboly je

$$k(t) = \left[-\frac{t^2}{3} + 5 ; t - 1 \right], t \in \mathbb{R}.$$

b Souřadnice průsečíků paraboly s osou y získáme např. dosazením $x = 0$ do obecné rovnice:

$$\begin{aligned}y^2 + 2y - 14 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -1 \pm \sqrt{15}\end{aligned}$$

Průsečíky paraboly s osou y jsou body $[0 ; -1 - \sqrt{15}]$ a $[0 ; -1 + \sqrt{15}]$.

Souřadnice průsečíku paraboly s osou x získáme dosazením $y = 0$ do obecné rovnice:

$$\begin{aligned}3x - 14 &= 0 \\ x &= \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Průsečík paraboly s osou x je bod $[4\frac{2}{3} ; 0]$.

c Směrové vektory tečen paraboly jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = \left(-\frac{2}{3}t ; 1 \right), t \in \mathbb{R}.$$

Tečna paraboly je rovnoběžná s přímkou q právě tehdy, když její směrový vektor a normálový vektor přímky q ($\vec{n}_q = (3 ; -2)$) jsou kolmé. Tedy řešíme (s využitím skalárního součinu vektorů):

$$\begin{aligned}u(t) \cdot \vec{n}_q &= 0 \\ \left(-\frac{2}{3}t ; 1 \right) \cdot (3 ; -2) &= 0 \\ -2 - 2t &= 0 \\ t &= -1\end{aligned}$$

Tečna paraboly v bodě $k(-1) = [4\frac{2}{3} ; -2]$ je rovnoběžná s přímkou q .

Obecná rovnice této tečny je

$$3x - 2y - 18 = 0.$$

- 10** Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

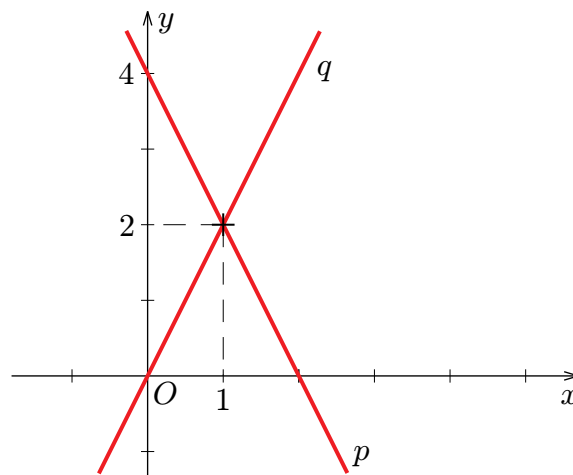
$$4x^2 - y^2 - 8x + 4y = 0.$$

- a** Napište parametrický popis křivky.
b Určete průsečíky křivky se souřadnicovými osami.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a upravíme s využitím vzorce pro rozdíl čtverců.

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 - (y-2)^2 &= 0 \\ \underbrace{(2(x-1))^2}_{a^2} - \underbrace{(y-2)^2}_{b^2} &= 0 \\ \underbrace{[2(x-1) + (y-2)]}_a \cdot \underbrace{[2(x-1) - (y-2)]}_b &= 0 \\ (2x + y - 4) \cdot (2x - y) &= 0 \end{aligned}$$



Kuželosečka je singulární – složená ze dvou různoběžných přímek:

$$\begin{aligned} p: 2x + y - 4 &= 0 \\ q: 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

- a** Průsečíkem přímek je bod $[1 ; 2]$, směrový vektor přímky p je $(1 ; -2)$, směrový vektor přímky q je $(1 ; 2)$.

Parametrické popisy přímek p a q jsou:

$$\begin{aligned} p: \quad x &= 1 + t \\ y &= 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q: \quad x &= 1 + s \\ y &= 2 + 2s, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- b** Průsečíky přímky p se souřadnicovými osami jsou body $[0 ; 4]$, $[2 ; 0]$.

Průsečík přímky q se souřadnicovými osami je bod $[0 ; 0]$.

- 11** Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$2x^2 + y^2 + 12x - 2y + 19 = 0.$$

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y .

$$2(x+3)^3 + (y-1)^2 = 0$$

Této rovnici vyhovuje právě jedna dvojice x a y . Kuželosečka je singulární – jeden bod $[-3 ; 1]$.

- 12** Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$y^2 + 6y + 9 = 0.$$

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné y .

$$(y+3)^2 = 0$$

Kuželosečka je singulární – jedna dvojnásobná přímka: $y = -3$.