

MATEMATIKA – PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Parametrický popis křivek

1 Je dána křivka $k(t) = [t^2 - t + 2; t^3 - 3t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Nakreslete část křivky k pro $t \in \langle -3; 3 \rangle$. Napište rovnice tečen křivky v bodech $k(-1)$, $k(1)$ a $k(2)$.

Řešení

Dosazením několika hodnot parametru t získáme souřadnice bodů křivky k .

Dále vypočteme souřadnice průsečíků s osami x a y . Průsečík křivky s osou x je bod, jehož y -ová souřadnice je nulová. Řešíme rovnici

$$P_x: t^3 - 3t = 0.$$

Řešení jsou tři, $t \in \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Průsečíky s osou x jsou body $k(0) = [2; 0]$, $k(\sqrt{3}) = [5 - \sqrt{3}; 0]$, $k(-\sqrt{3}) = [5 + \sqrt{3}; 0]$.

Průsečík křivky s osou y je bod, jehož x -ová souřadnice je nulová. Řešíme rovnici

$$P_y: t^2 - t + 2 = 0.$$

Tato rovnice nemá reálné kořeny, tedy křivka neprotíná osu y .

Směrové vektory tečen křivky k získáme derivováním křivky k po souřadnicích:

$$u(t) = k'(t) = (2t - 1; 3t^2 - 3).$$

V bodě $k(1) = [2; -2]$ má křivka tečnu p se směrovým vektorem $u(1) = (1; 0)$ a parametrickým předpisem:

$$\begin{aligned} p: x &= 2 + s \\ y &= -2, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky p je $y = -2$.

V bodě $k(-1) = [4; 2]$ má křivka tečnu q se směrovým vektorem $u(-1) = (-3; 0)$ a parametrickým předpisem:

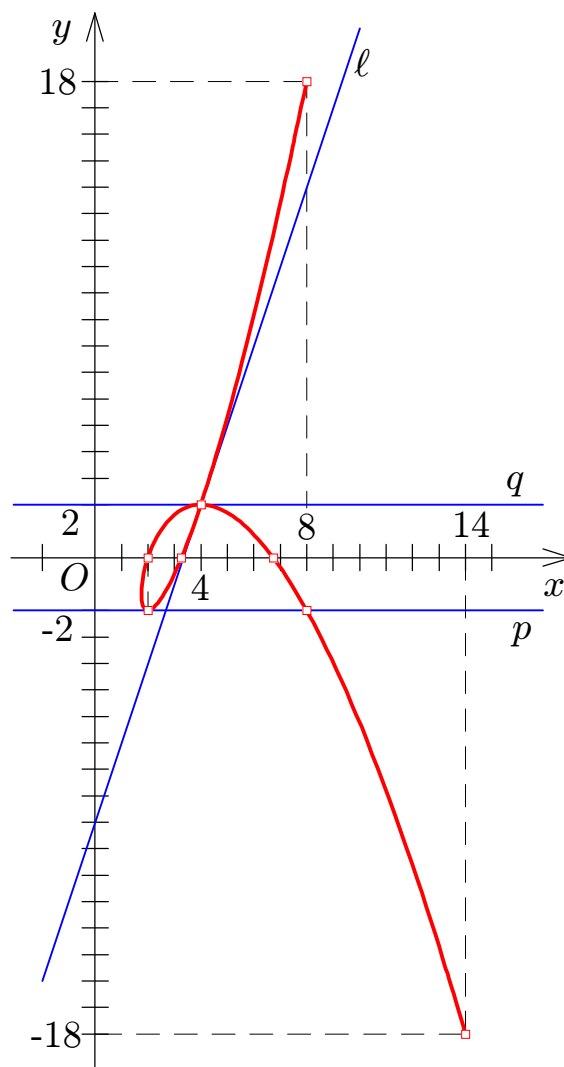
$$\begin{aligned} q: x &= 4 - 3s \\ y &= 2, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky q je $y = 2$.

V bodě $k(2) = [4; 2]$ má křivka tečnu ℓ se směrovým vektorem $u(2) = (3; 9)$ a parametrickým předpisem:

$$\begin{aligned} \ell: x &= 4 + s \\ y &= 2 + 3s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky ℓ je $y - 3x + 10 = 0$.



2 Je dána křivka (elipsa) $k(t) = [4 \cos(t) ; 3 \sin(t)]$, $t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$.

Nakreslete elipsu k . Napište rovnice tečen ve vrcholech elipsy.

Řešení

Křivka $[4 \cos(t) ; 4 \sin(t)]$ je kružnice se středem v bodě $[0 ; 0]$ a poloměrem 4.

Křivka $[3 \cos(t) ; 3 \sin(t)]$ je kružnice se středem v bodě $[0 ; 0]$ a poloměrem 3.

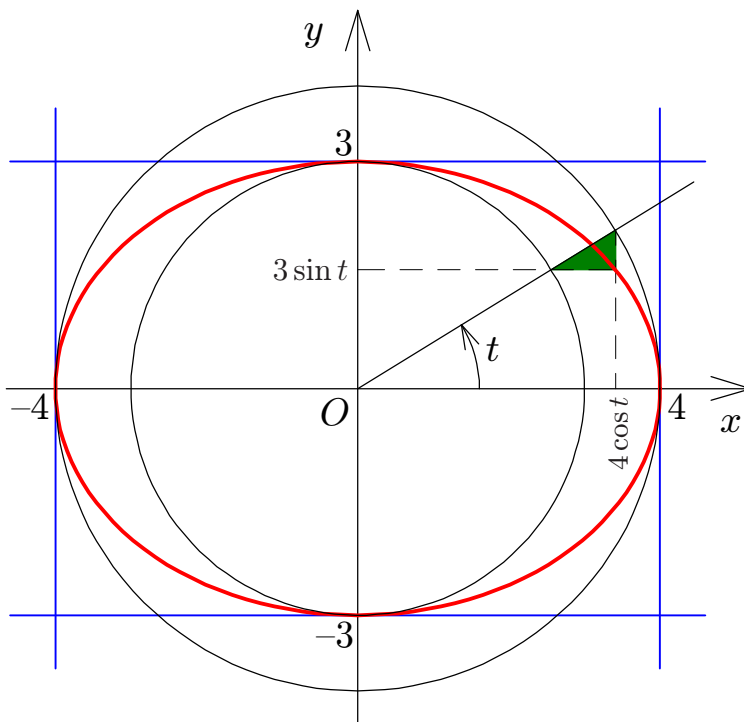
Bod zadané elipsy k pro konkrétní hodnotu parametru t (zde orientovaný úhel) tedy můžeme sestavit trojúhelníkovou konstrukcí elipsy.

Tečné vektory křivky k jsou

$$u(t) = (-4 \sin(t) ; 3 \cos(t)), t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$$

Vrcholy elipsy a rovnice tečen v těchto bodech:

$t = 0$	$k(0) = [4 ; 0]$	$x = 4,$
$t = \frac{\pi}{2}$	$k(\frac{\pi}{2}) = [0 ; 3]$	$y = 3,$
$t = \pi$	$k(\pi) = [-4 ; 0]$	$x = -4,$
$t = \frac{3\pi}{2}$	$k(\frac{3\pi}{2}) = [0 ; -3]$	$y = -3.$



3 Napište parametrické vyjádření elipsy o středu $S[4 ; -2]$, hlavní osou rovnoběžnou s osou y , velikost hlavní poloosy $a = 4$, velikost vedlejší poloosy $b = 2$.

Vypočítejte souřadnice průsečíků elipsy s osou x a dále vypočítejte souřadnice průsečíku tečen elipsy v těchto bodech.

Řešení

Elipsa má parametrický předpis

$$k(t) = [4 + 2 \cos(t) ; -2 + 4 \sin(t)], t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

Hodnoty parametru t průsečíků elipsy s osou x získáme vyřešením rovnice $-2 + 4 \sin(t) = 0$. Dosazením řešení rovnice (na daném intervalu) $t_1 = \frac{\pi}{6}$ a $t_2 = \frac{5\pi}{6}$ do předpisu křivky získáme průsečíky s osou x : $k(\frac{\pi}{6}) = [4 + \sqrt{3} ; 0]$ a $k(\frac{5\pi}{6}) = [4 - \sqrt{3} ; 0]$.

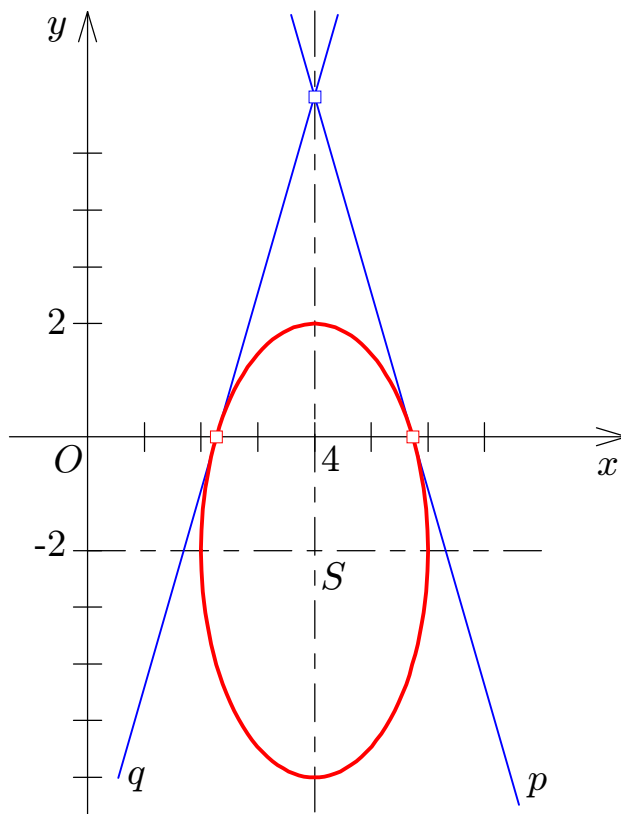
Tečné vektory elipsy jsou

$$u(t) = (-2 \sin t ; 4 \cos t), t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

Tečna p elipsy v bodě $k(\frac{\pi}{6})$ má směrový vektor $u(\frac{\pi}{6}) = (-1 ; 2\sqrt{3})$ a parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} p: x &= 4 + \sqrt{3} - s \\ y &= 2\sqrt{3} \cdot s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tečny elipsy v jejích průsečících s osou x se protínají na hlavní ose elipsy, což je přímka $x = 4$. Stačí tedy určit souřadnice průsečíku tečny p a hlavní osy elipsy. Průsečík tečen má souřadnice $[4 ; 6]$.



4 Je dána křivka $k(t) = [t^2 - 1 ; t + 1]$, $t \in \mathbb{R}$.

Nakreslete část křivky pro $t \in \langle -4 ; 4 \rangle$.

Křivka je parabola, napište rovnici osy o a řídící přímky d této paraboly.

Řešení

Osa paraboly je přímka $o : y = 1$, vrchol je bod $V[-1 ; 1]$.

Řídící přímku lze získat z geometrických vlastností paraboly. Věta o subtangentě a subnormále říká, že ohnisko pólí součet subtangenty a subnormály.

Určíme rovnici tečny a normály paraboly ve zvoleném bodě $k(2) = [3 ; 3]$.

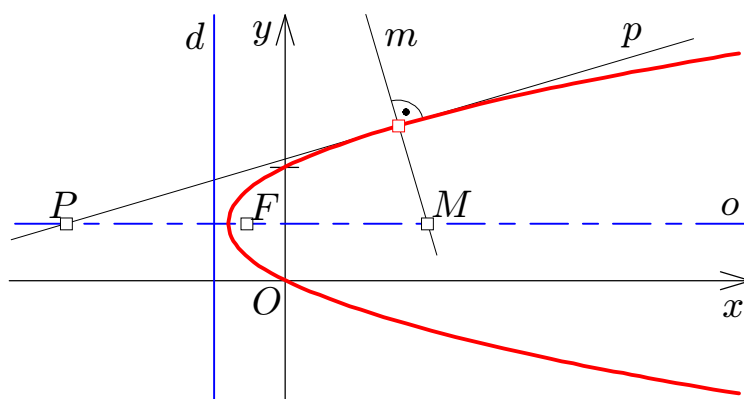
Tečné vektory paraboly mají předpis $u(t) = (2t ; 1)$, normálové vektory mají předpis $n(t) = (-1 ; 2t)$.

Tečna p paraboly v bodě $k(2)$ má směrový vektor $u(2) = (4 ; 1)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} p : x &= 3 + 4s \\ y &= 3 + s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Normála m paraboly v bodě $k(2)$ má směrový vektor $n(2) = (-1 ; 4)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} m : x &= 3 - r \\ y &= 3 + 4r, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Průsečík tečny p s osou paraboly je bod $P[-5 ; 1]$, průsečík normály m s osou paraboly je bod $M[\frac{7}{2} ; 1]$.

Ohnisko F paraboly je střed úsečky určené průsečíkem tečny s osou a průsečíkem normály s osou:

$$F = \frac{P + M}{2} = \left[-\frac{3}{4} ; 1 \right].$$

Řídící přímka paraboly je od vrcholu vzdálena stejně jako ohnisko, tedy rovnice řídící přímky d je $x = -\frac{5}{4}$.

- 5** Je dána šroubovice $k(t) = [4 \cos(t), -4 \sin(t), 2t]$, $t \in \mathbb{R}$. Osa šroubovice je osa z , šroubovice je levotočivá, redukovaná výška závitu je $v_0 = 2$.

Vypočítejte souřadnice průsečíku tečny šroubovice v bodě $A = k(\frac{\pi}{2})$ s půdorysnou (souřadnicovou rovinou (x, y)).

Řešení

Tečné vektory šroubovice mají předpis:

$$u(t) = (-4 \sin(t) ; -4 \cos(t) ; 2), t \in \mathbb{R}.$$

Tečna p šroubovice v bodě $k(\frac{\pi}{2}) = [0 ; -4 ; \pi]$ má směrový vektor $u(\frac{\pi}{2}) = (-4 ; 0 ; 2)$

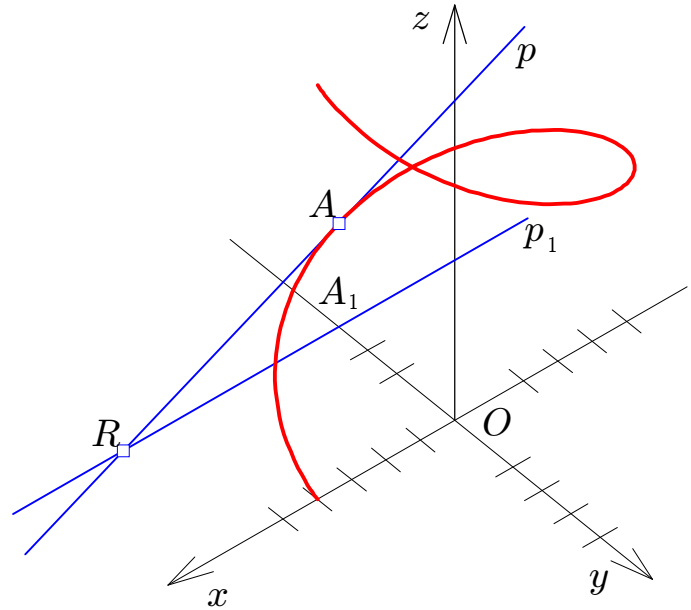
a rovnice:

$$\begin{aligned} p: x &= -4s \\ y &= -4 \\ z &= \pi + 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hodnotu parametru s , která odpovídá průsečíku přímky p s půdorysnou (x, y) zjistíme vyřešením rovnice

$$\pi + 2s = 0.$$

Řešením je $s = -\frac{\pi}{2}$ a průsečík R přímky p s půdorysnou má souřadnice $[2\pi ; -4 ; 0]$.



- 6** Je dána křivka $k(t) = [t^2 ; t^3]$, $t \in \mathbb{R}$.

Zjistěte, zda jsou na křivce singulární body. Pokud ano, napište jejich souřadnice.

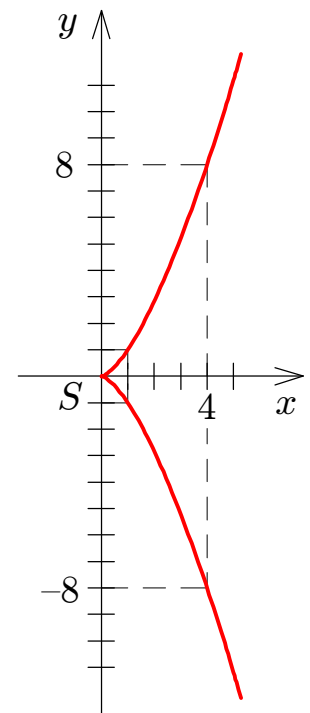
Řešení

Singulární bod křivky je takový bod, ve kterém neexistuje tečna – tečný vektor křivky je nulový nebo neexistuje.

Tečné vektory dané křivky mají předpis $u(t) = (2t ; 3t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Pro hodnotu parametru $t = 0$ je $u(0) = (0 ; 0)$. Je zřejmé, že pro jiné hodnoty parametru tečné vektory existují a nejsou nulové. Tedy jediným singulárním bodem křivky je bod $S = k(0) = [0 ; 0]$.

Poznámka: křivka se nazývá *semikubická parabola*.



7 Je dána křivka $k(t) = [2 \cos(t) - \cos(2t) ; 2 \sin(t) - \sin(2t)]$, $t \in \langle -\pi ; \pi \rangle$.

Zjistěte zda má křivka singulární body. Pokud ano, napište jejich souřadnice.

Napište obecné rovnice tečen a normál křivky v bodech $[1 ; ?]$.

Řešení

Tečné vektory dané křivky mají předpis

$$u(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) \\ 2 \cos(t) - 2 \cos(2t) \end{pmatrix}, t \in \langle -\pi ; \pi \rangle.$$

Pro určení singulárních bodů křivky musíme řešit rovnice

$$\begin{aligned} -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) &= 0, \\ 2 \cos(t) - 2 \cos(2t) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením první rovnice na daném intervalu jsou $t \in \left\{ -\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$.

Řešením druhé rovnice na daném intervalu jsou $t \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Společným řešením obou rovnic je pouze $t = 0$, tedy jediným singulárním bodem křivky je $S = k(0) = [1 ; 0]$.

Chybějící souřadnici bodů $[1 ; ?]$ dourčíme vyřešením rovnice $2 \cos(t) - \cos(2t) = 1$.

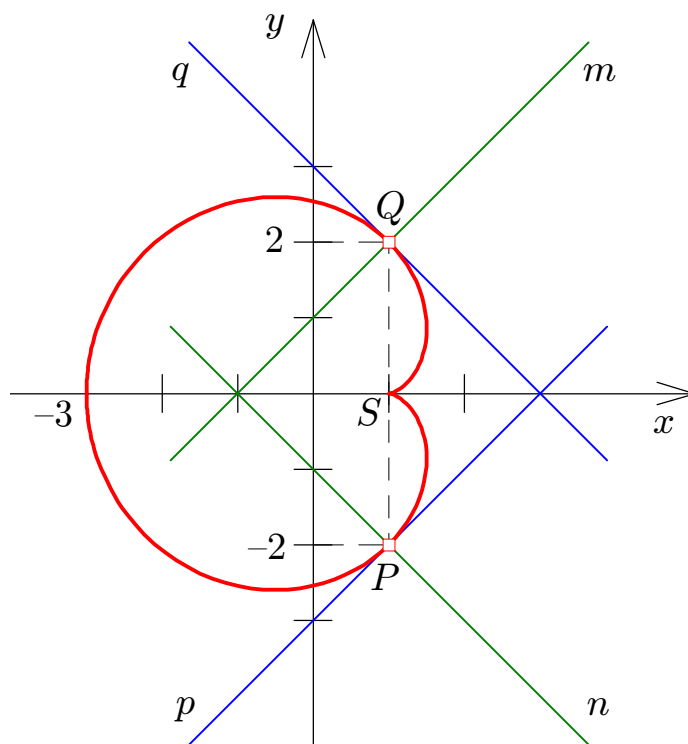
Řešením jsou hodnoty $t \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\}$.

Tečna p křivky v bodě $P = k(-\frac{\pi}{2}) = [1 ; -2]$ má rovnici $x - y - 3 = 0$, normála n v bodě P má rovnici $x + y + 1 = 0$.

Tečna q křivky v bodě $Q = k(\frac{\pi}{2}) = [1 ; 2]$ má rovnici $x + y - 3 = 0$, normála m v bodě Q má rovnici $x - y + 1 = 0$.

V bodě S křivka tečnu nemá.

Poznámka: křivka se nazývá *kardioida*.



8 Je dána křivka $k(t) = [1 + t; -t^2; 1 + t^3]$, $t \in \mathbb{R}$.

Napište rovnice tečny křivky v bodě $A = k(1)$. Dále napište rovnici roviny α , která tímto bodem prochází a je kolmá k tečně křivky v tomto bodě (tzv. *normálová rovina* křivky k v bodě $k(1)$).

Řešení

Tečné vektory křivky k mají předpis

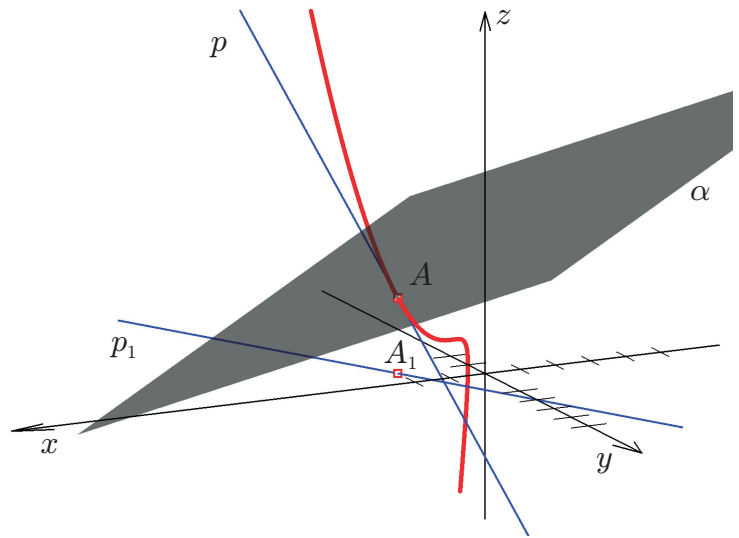
$$u(t) = (1; -2t; 3t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tečna p křivky v bodě $A[2; -1; 2]$ má směrový vektor $u(1) = (1; -2; 3)$ a parametrický předpis:

$$\begin{aligned} p: \quad x &= 2 + s \\ y &= -1 - 2s \\ z &= 2 + 3s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rovina α je kolmá na přímku p , tedy směrový vektor přímky p je normálovým vektorem roviny α . Tedy lze snadno odvodit obecnou rovnici roviny α :

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z + d &= 0, \\ A \in \alpha: \quad 2 + 2 + 6 + d &= 0 \Rightarrow d = -10, \\ \alpha: \quad x - 2y + 3z - 10 &= 0. \end{aligned}$$



9 Je dána křivka $k(t) = [t; t^2; e^t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Napište rovnici normálové roviny α křivky v průsečíku křivky s osou z . Dále napište rovnice průsečnice této roviny s půdorysnou $\pi(x, y)$.

Řešení

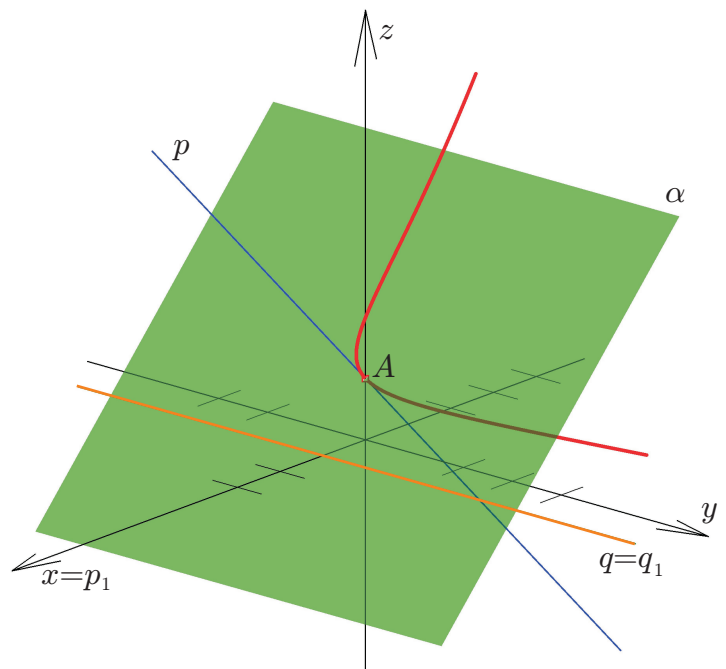
Nejdříve určíme průsečík křivky s osou z . Bod $A = k \cap z$ má souřadnice $[0; 0; ?]$. Z předpisu křivky je zřejmé, že to je bod $k(0) = [0; 0; 1]$.

Tečné vektory křivky mají předpis

$$u(t) = (1; 2t; e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tečný vektor křivky v bodě A je $u(0) = (1; 0; 1)$ a je to zároveň normálový vektor roviny α . Odvodíme tedy obecnou rovnici normálové roviny:

$$\begin{aligned} x + z + d &= 0 \\ A \in \alpha: \quad 1 + d &= 0 \Rightarrow d = -1, \\ \alpha: \quad x + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$



Dále hledáme průsečnici rovin $\alpha: x + z - 1 = 0$ a $\pi: z = 0$.

Průsečnice má parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} q: \quad x &= 1 \\ y &= s \\ z &= 0, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10 Je dána křivka $k(t) = \left[\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} ; \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right]$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$.

Určete souřadnice všech průsečíků křivky s osou x .

Napište obecné rovnice tečen křivky v těchto bodech.

Řešení

Průsečíky s osou x jsou body $P[? ; 0]$.

Pro určení příslušných hodnot parametru t řešíme rovnici

$$\frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} = 0.$$

$$\sin t \cos t = 0 \iff \sin t = 0 \vee \cos t = 0 \iff t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Průsečíky křivky k s osou x jsou body

$$P_1 = k(0) = [1 ; 0], P_2 = k\left(\frac{\pi}{2}\right) = [0 ; 0], P_3 = k(\pi) = [-1 ; 0], P_4 = k\left(\frac{3\pi}{2}\right) = [0 ; 0].$$

Tečné vektory křivky k jsou $u(t) = \left(-\frac{\sin t \cdot (2 + \cos^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2} ; \frac{3 \cos^2 t - 2}{(1 + \sin^2 t)^2} \right)$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$.

Obecné rovnice tečen v průsečících s osou x jsou:

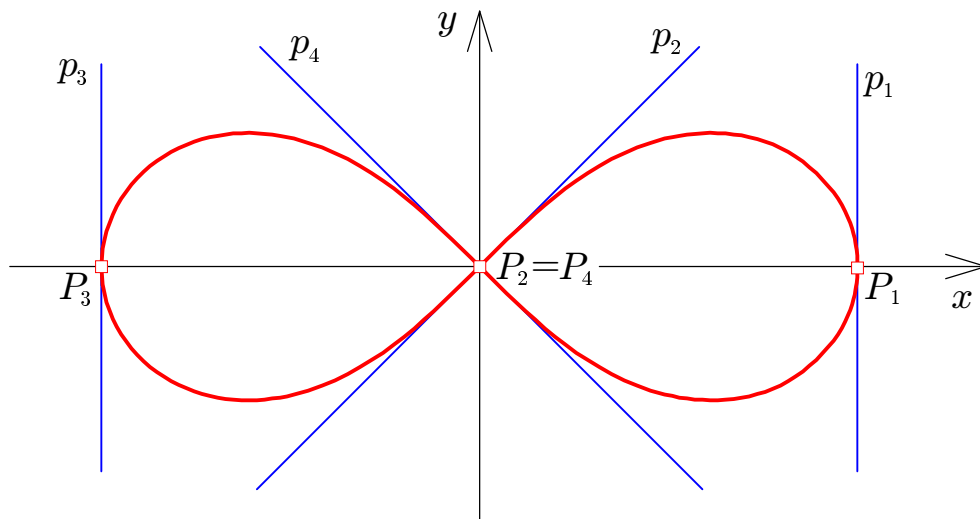
$$p_1 : x - 1 = 0,$$

$$p_2 : x - y = 0,$$

$$p_3 : x + 1 = 0,$$

$$p_4 : x + y = 0.$$

Poznámka: Křivka se nazývá *Bernoulliho lemniskata*. Obrázek není součástí řešení v testu.



11 Je dána křivka $k(t) = [t^4; -8t^2; 12\ln t]$, $t \in (0; \infty)$.

Zjistěte, ve kterých bodech má křivka k tečny rovnoběžné s rovinou $\alpha(A, B, C)$, $A[1; 0; 0]$, $B[0; 1; 0]$, $C[0; 0; 1]$.

Řešení

Přímka je rovnoběžná s rovinou, pokud je její směrový vektor kolmý na normálový vektor roviny. Nejprve určíme normálový vektor roviny α . Směrové vektory roviny α jsou $u = \vec{AB} = (-1; 1; 0)$ a $v = \vec{AC} = (-1; 0; 1)$. Normálový vektor roviny α je $n = u \times v = (1; 1; 1)$.

Směrové vektory tečen křivky k jsou $u(t) = \left(4t^3; -16t; \frac{12}{t}\right)$, $t \in (0; \infty)$.

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin nulový, tedy řešíme rovnici

$$(1; 1; 1) \cdot \left(4t^3; -16t; \frac{12}{t}\right) = 0,$$

$$4t^3 - 16t + \frac{12}{t} = 0.$$

Řešením této rovnice z intervalu $(0; \infty)$ jsou $t \in \{1; \sqrt{3}\}$. Tedy body přímky k , ve kterých je její tečna rovnoběžná s rovinou α jsou

$$k(1) = [1; -8; 0] \quad \text{a} \quad k(\sqrt{3}) = [9; -24; 6\ln(3)].$$

12 Je dána křivka $k(t) = [\sin(2t); 1 - \cos(2t); 2\cos(t)]$, $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Napište souřadnice vektoru, který je kolmý k rovině určené tečnami křivky v bodě $A[0; 2; 0]$.

Řešení

Nejprve určíme hodnoty parametru t , pro které je $k(t) = A$.

Řešíme rovnice

$$\begin{aligned} \sin(2t) &= 0, \\ 1 - \cos(2t) &= 2, \\ 2\cos(t) &= 0. \end{aligned}$$

Společným řešením těchto rovnic jsou hodnoty parametru $t \in \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$. Tedy bod $A = k(\frac{\pi}{2}) = k(\frac{3\pi}{2})$.

Tečné vektory křivky k jsou

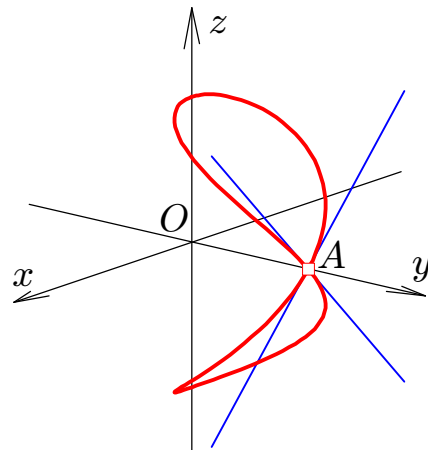
$$u(t) = (2\cos(2t); 2\sin(2t); -2\sin(t)), \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Rovina α určená tečnami křivky k v bodě A má směrové vektory $u(\frac{\pi}{2}) = (1; 0; 1)$ a $u(\frac{3\pi}{2}) = (-1; 0; 1)$.

Vektor kolmý k rovině α je vektrovým součinem směrových vektorů tečen v bodě A :

$$n = (1; 0; 1) \times (-1; 0; 1) = (0; -2; 0).$$

Poznámka: Křivka se nazývá *Vivianiho okénko*. Obrázek není součástí řešení v testu.



13 Určete singulární body křivky $k(t) = [2 \sin^2 t ; 2(\sin^2 t) \cdot \operatorname{tg} t]$, $t \in (-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2})$.

Dále určete souřadnice průsečíku tečen v bodech $[1 ; ?]$.

Zjistěte, zda má křivka asymptotu. Pokud ano, napište její rovnici.

Řešení

Singulární body křivky jsou takové body, ve kterých je tečný vektor křivky buď nulový, nebo neexistuje.

Tečné vektory křivky k jsou

$$u(t) = \left(4 \sin t \cos t ; \frac{2(\sin^2 t)(2 \cos^2 t + 1)}{\cos^2 t} \right), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right).$$

Řešíme tedy rovnice: $4 \sin t \cos t = 0$ a $\frac{2(\sin^2 t)(2 \cos^2 t + 1)}{\cos^2 t} = 0$.

Řešením obou rovnic na daném intervalu je jediná hodnota parametru $t = 0$. Jediným singulárním bodem křivky k je tedy bod $S = k(0) = [0 ; 0]$.

Body s x -ovou souřadnicí 1 zjistíme vyřešením rovnice $2 \sin^2 t = 1$. Řešením jsou hodnoty parametru $t \in \{-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\}$. Hledané body jsou tedy

$$P = k(-\frac{\pi}{4}) = [1 ; -1] \quad \text{a} \quad Q = k(\frac{\pi}{4}) = [1 ; 1].$$

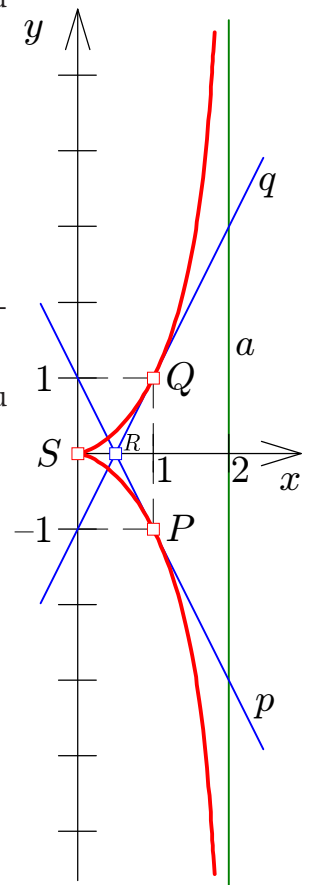
Tečna p křivky k v bodě $P[1 ; -1]$ má směrový vektor $u(-\frac{\pi}{4}) = (-1 ; 2)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} p: x &= 1 - s \\ y &= -1 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tečna q křivky k v bodě $Q[1 ; 1]$ má směrový vektor $u(\frac{\pi}{4}) = (1 ; 2)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} q: x &= 1 + r \\ y &= 1 + 2r, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Průsečíkem tečen p a q je bod $R[\frac{1}{2} ; 0]$.



Pro určení existence asymptoty řešíme limity souřadnicových funkcí:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} 2 \sin^2 t = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} 2(\sin^2 t) \cdot \operatorname{tg} t = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} 2 \sin^2 t = 2 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} 2(\sin^2 t) \cdot \operatorname{tg} t = +\infty$$

Asymptotou křivky k je přímka $a: x = 2$.

Poznámka: Křivka se nazývá *Dioklova kisoida*. Obrázek není součástí řešení v testu.