

MATEMATIKA – PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Parametrický popis ploch

1 Je dána plocha $p(t,s) = [t \cdot s ; t ; s^2]$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.

Napište obecné rovnice tečných rovin plochy v bodech $P[2 ; 1 ; 4]$, $Q[0 ; 0 ; 1]$ a $O[0 ; 0 ; 0]$.

Řešení

(a) Nejprve zjistíme hodnoty parametrů t a s , jejichž dosazením do předpisu plochy p získáme bod P . Musí tedy zároveň platit $t \cdot s = 2$, $t = 1$, $s^2 = 4$. Jedinou odpovídající dvojicí je $t = 1$, $s = 2$. Proto je bod $P = p(1,2) = [2 ; 1 ; 4]$.

Pro určení tečné roviny plochy v daném bodě potřebujeme dva lineárně nezávislé tečné vektory plochy, tj. tečné vektory křivek, které leží na ploše a daným bodem procházejí.

Zavedeme si tedy tzv. t -křivku a s -křivku plochy p , které prochází bodem P .

Zvolením konkrétní hodnoty parametru s , v našem případě $s = 2$, získáme předpis křivky

$$k(t) = p(t,2) = [2t ; t ; 4] \quad (\text{přímka v rovině } z = 4).$$

Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (2 ; 1 ; 0)$. Potřebujeme tečný vektor v bodě $P = k(1)$, tedy $k'(1) = (2 ; 1 ; 0)$.

Zvolením konkrétní hodnoty parametru t , v našem případě $t = 1$, získáme předpis křivky

$$\ell(s) = p(1,s) = [s ; 1 ; s^2] \quad (\text{parabola v rovině } y = 1).$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(s) = (1 ; 0 ; 2s)$. Potřebujeme tečný vektor v bodě $P = \ell(2)$, tedy $\ell'(2) = (1 ; 0 ; 4)$.

Tečná rovina α plochy p je určena bodem P a vektory $k'(1)$, $\ell'(2)$. Parametrické rovnice roviny α jsou

$$\begin{aligned} \alpha: \quad x &= 2 + 2u + v \\ y &= 1 + u \\ z &= 4 + 4v, \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice roviny α je

$$\alpha: \quad 4x - 8y - z + 4 = 0.$$

(b) Obdobně budeme postupovat i při určování tečných rovin v bodě Q . Vyřešením rovnic $t \cdot s = 0$, $t = 0$, $s^2 = 1$ zjistíme, že $Q = p(0,1) = p(0,-1)$. V bodě Q může tedy plocha p mít dvě tečné roviny.

Zvolením hodnoty parametru $s = 1$ získáme předpis t -křivky

$$k(t) = p(t,1) = [t ; t ; 1].$$

Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (1 ; 1 ; 0)$. Tečný vektor v bodě Q je $k'(0) = (1 ; 1 ; 0)$.

Zvolením hodnoty parametru $t = 0$ získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(0,s) = [0 ; 0 ; s^2].$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(s) = (0 ; 0 ; 2s)$. Tečný vektor v bodě Q je $\ell'(1) = (0 ; 0 ; 2)$.

Parametrické rovnice tečné roviny β plochy v bodě Q jsou

$$\begin{aligned} \beta: \quad x &= 0 + u \\ y &= 0 + u \\ z &= 1 + 2v, \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice je $\beta: x - y = 0$.

Zvolením hodnoty parametru $s = -1$ získáme předpis t -křivky

$$m(t) = p(t,-1) = [-t ; t ; 1].$$

Tečné vektory křivky m jsou $m'(t) = (-1 ; 1 ; 0)$. Tečný vektor v bodě Q je $m'(0) = (-1 ; 1 ; 0)$.

Zvolením hodnoty parametru $t = 0$ získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(0,s) = [0 ; 0 ; s^2].$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(s) = (0 ; 0 ; 2s)$. Tečný vektor v bodě Q je $\ell'(-1) = (0 ; 0 ; -2)$.

Parametrické rovnice tečné roviny γ plochy v bodě Q jsou

$$\begin{aligned} \gamma: \quad x &= 0 - u \\ y &= 0 + u \\ z &= 1 - 2v, \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice je $\gamma: x + y = 0$.

(c) Vyřešením rovnic $t \cdot s = 0$, $t = 0$, $s^2 = 0$ zjistíme, že $O = p(0,0)$.

Zvolením hodnoty parametru $s = 0$ získáme předpis t -křivky

$$k(t) = p(t,0) = [0 ; t ; 0].$$

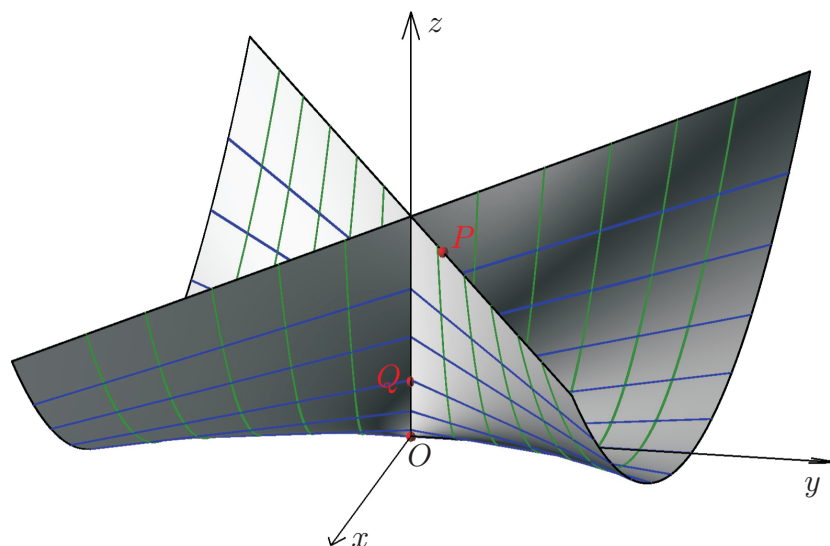
Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (0 ; 1 ; 0)$. Tečný vektor v bodě O je $k'(0) = (0 ; 1 ; 0)$.

Zvolením hodnoty parametru $t = 0$ získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(0,s) = [0 ; 0 ; s^2].$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(s) = (0 ; 0 ; 2s)$. Tečný vektor v bodě O je $\ell'(0) = (0 ; 0 ; 0)$.

Vektor $\ell'(0)$ je nulový. Bod $O[0 ; 0 ; 0]$ je proto singulární bod plochy a tečná rovina v něm neexistuje.



Pozn.: Plocha je *parabolický konoid* nebo též *Whitneyho deštník*. Na obrázku je znázorněna část plochy p pro hodnoty parametrů $t \in \langle -5,5 \rangle$, $s \in \langle -2,2 \rangle$.

Zeleně jsou na obrázku znázorněny s -křivky (paraboly), modře pak t -křivky (přímky).

2 Je dána plocha

$$p(t,s) = \left[\left(3 + t \cos \frac{s}{2} \right) \cos s ; \left(3 + t \cos \frac{s}{2} \right) \sin s ; t \sin \frac{s}{2} \right], \quad t \in \mathbb{R}, s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Určete tečnou rovinu plochy v bodě $P = p(1,\pi) = [-3 ; 0 ; 1]$.

Řešení

Zvolením hodnoty parametru $s = \pi$ získáme předpis t -křivky $k(t) = p(t,\pi) = [-3 ; 0 ; t]$. Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (0 ; 0 ; 1)$. Tečný vektor v bodě P je $k'(1) = (0 ; 0 ; 1)$.

Zvolením hodnoty parametru $t = 1$ získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(1,s) = \left[\left(3 + \cos \frac{s}{2} \right) \cos s ; \left(3 + \cos \frac{s}{2} \right) \sin s ; \sin \frac{s}{2} \right].$$

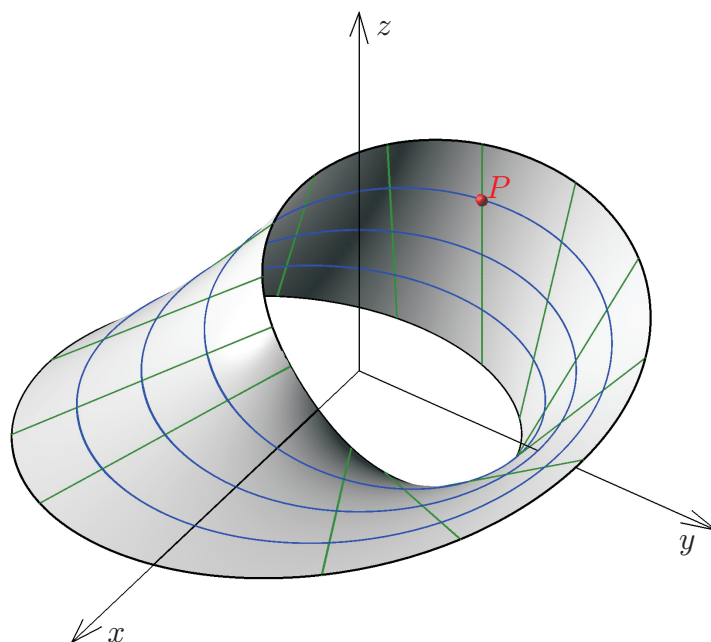
Tečné vektory křivky ℓ jsou

$$\ell'(s) = \left(-\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{s}{2} \cdot \cos s - \left(3 + \cos \frac{s}{2} \right) \sin s ; -\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{s}{2} \cdot \sin s + \left(3 + \cos \frac{s}{2} \right) \cos s ; \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{s}{2} \right).$$

Tečný vektor v bodě P je $\ell'(\pi) = \left(\frac{1}{2} ; -3 ; 0 \right)$.

Parametrické rovnice tečné roviny plochy p v bodě P jsou

$$\begin{aligned} \tau: \quad x &= -3 & + \frac{1}{2}u \\ y &= 0 & + -3u \\ z &= 1 & + v \end{aligned} \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$



Pozn.: Plocha se nazývá *Möbiův proužek*. Na obrázku je znázorněna část plochy pro hodnoty parametrů $s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$, $t \in \langle -2 ; 2 \rangle$.

- 3** Napište parametrické vyjádření rotačního elipsoidu, který vznikne rotací elipsy $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, ležící v nárysně $\nu(x, z)$
- (a) kolem osy z (zploštělý elipsoid),
 (b) kolem osy x (protáhlý elipsoid).

Řešení

(a) Parametrický popis poloviny elipsy – polomeridiánu rotační plochy je

$$m(t) = [4 \cos t ; 0 ; 3 \sin t], \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Otáčením bodu kolem osy z vzniká kružnice v rovině rovnoběžné s půdorysnou π . Parametrický popis takové kružnice – se středem $S[0 ; 0 ; a]$ a poloměrem r je

$$k(s) = [r \cdot \cos s ; r \cdot \sin s ; a].$$

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ získáme souřadnice bodu M meridiánu m

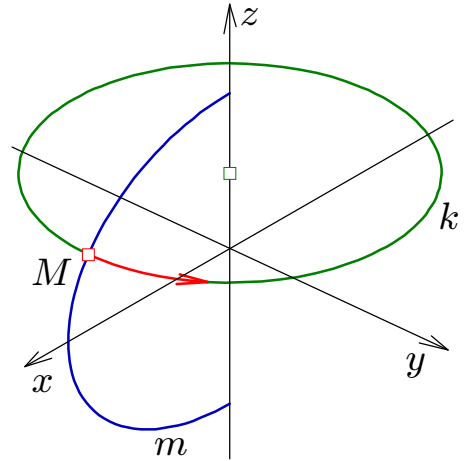
$$M = m(t_0) = [4 \cos t_0 ; 0 ; 3 \sin t_0].$$

Bod M se při rotačním pohybu kolem osy z pohybuje po rovnoběžkové kružnici k se středem $[0 ; 0 ; 3 \sin t_0]$ a poloměrem $4 \cos t_0$, která má parametrický předpis

$$k(s) = [\underbrace{4 \cos t_0 \cdot \cos s}_r ; \underbrace{4 \cos t_0 \cdot \sin s}_r ; \underbrace{3 \sin t_0}_a], \quad s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis plochy – zploštělého elipsoidu – je

$$p(t, s) = [4 \cos t \cos s ; 4 \cos t \sin s ; 3 \sin t], \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



(b) Parametrický popis poloviny elipsy – polomeridiánu rotační plochy je

$$m(t) = [4 \cos t ; 0 ; 3 \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Otáčením bodu kolem osy x vzniká kružnice v rovině rovnoběžné s bokorysnou μ . Parametrický popis takové kružnice – se středem $S'[b ; 0 ; 0]$ a poloměrem r' je

$$\ell(s) = [b ; r' \cdot \cos s ; r' \cdot \sin s].$$

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \langle 0, \pi \rangle$ získáme souřadnice bodu M meridiánu m

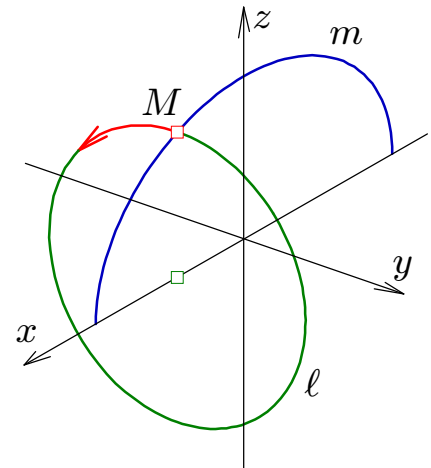
$$M = m(t_0) = [4 \cos t_0 ; 0 ; 3 \sin t_0].$$

Bod M se při rotačním pohybu kolem osy x pohybuje po rovnoběžkové kružnici ℓ se středem $[4 \cos t_0 ; 0 ; 0]$ a poloměrem $3 \sin t_0$, která má parametrický předpis

$$\ell(s) = [\underbrace{4 \cos t_0}_b ; \underbrace{3 \sin t_0 \cdot \cos s}_{r'} ; \underbrace{3 \sin t_0 \cdot \sin s}_{r'}], \quad s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis plochy – protáhlého elipsoidu – je

$$p(t, s) = [4 \cos t ; 3 \sin t \cos s ; 3 \sin t \sin s], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



4 Napište parametrické vyjádření elipsoidu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$.

Určete tečnou rovinu plochy v bodě $P[0; \frac{3}{2}; 5\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Řešení

Plocha je trojosý elipsoid se středem v bodě $O[0; 0; 0]$ a velikostmi poloos 4, 3 a 5 (na osách x , y a z). Nejprve parametricky popíšeme křivky na ploše, které leží v nárysně $\nu(x, z)$ a bokorysně $\mu(y, z)$.

V nárysně leží elipsa

$$n(t) = [4 \cos t; 0; 5 \sin t], \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

V bokorysně leží elipsa

$$m(t) = [0; 3 \cos t; 5 \sin t], \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

V rovinách rovnoběžných s půdorysnou leží na ploše elipsy, které mají hlavní vrcholy na elipse n a vedlejší vrcholy na elipse m .

Parametrický popis libovolné elipsy e , která leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou, má střed $S[0; 0; v]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou x , vedlejší osu rovnoběžnou s osou y , velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b , je $e(s) = [a \cdot \cos s; b \cdot \sin s; v]$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ získáme souřadnice bodu N na elipse n a bodu M na elipse m :

$$N[4 \cos t_0; 0; 5 \sin t_0], \quad M[0; 3 \cos t_0; 5 \sin t_0].$$

Elipsa e , která leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou, bod N je její hlavní vrchol a bod M je její vedlejší vrchol, má parametrický předpis $e(s) = [\underbrace{4 \cos t_0}_{a} \cdot \cos s; \underbrace{3 \cos t_0}_{b} \cdot \sin s; \underbrace{5 \sin t_0}_{v}]$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Pro popis elipsoidu stačí pouze poloviny elips m a n . Parametrický popis trojosého elipsoidu je

$$p(t, s) = [4 \cos t \cos s; 3 \cos t \sin s; 5 \sin t], \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle, t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Bod $P = p(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Volbou hodnoty parametru $s = \frac{\pi}{2}$ získáme předpis t -křivky procházející bodem P :

$$k(t) = p\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = [0; 3 \cos t; 5 \sin t], \quad t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (0; -3 \sin t; 5 \cos t)$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Tečný vektor křivky k v bodě P je $k'(\frac{\pi}{3}) = (0; -3\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2})$.

Volbou hodnoty parametru $t = \frac{\pi}{3}$ získáme předpis s -křivky procházející bodem P :

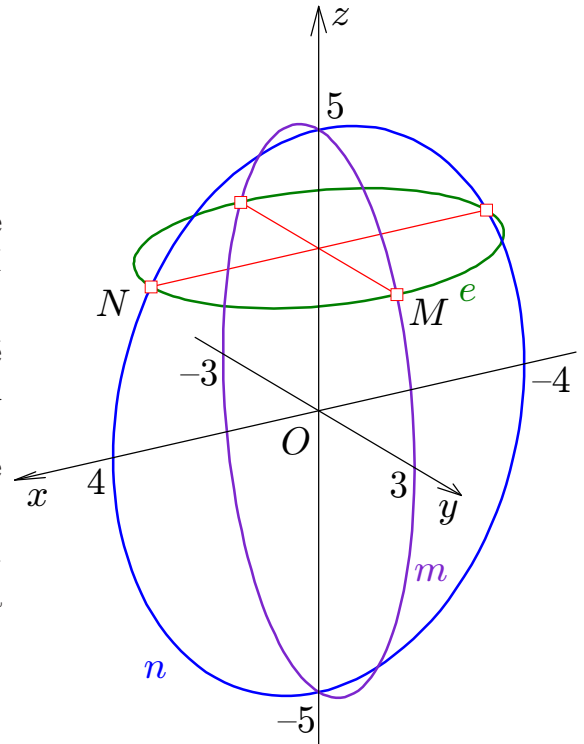
$$\ell(s) = p\left(\frac{\pi}{3}, s\right) = \left[2 \cos s; \frac{3}{2} \sin s; 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(s) = (-2 \sin s; \frac{3}{2} \cos s; 0)$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Tečný vektor křivky ℓ v bodě P je $\ell'(\frac{\pi}{2}) = (-2; 0; 0)$.

Tečná rovina elipsoidu má rovnice:

$$\begin{aligned} \tau: \quad x &= 0 - 2v \\ y &= \frac{3}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2}u \\ z &= 5\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}u, \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



- 5** Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací hyperboly $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ ležící v bo-
korysně $\mu(y, z)$

- (a) kolem osy z (jednodílný hyperboloid),
(b) kolem osy y (dvojdílný hyperboloid).

Dále napište parametrická vyjádření příslušných asymptotických kuželových ploch (tj. ploch, které vzniknou rotací asymptoty hyperboly kolem stejné osy rotace).

Řešení

Postup je obdobný jako při odvozování parametrického popisu rotačního elipsoidu.

- (a) Parametrický popis polomeridiánu (tj. jedné větve zadané hyperboly) je

$$m(t) = [0 ; 3 \cosh t ; 2 \sinh t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Body hyperboly opisují kružnice v rovinách rovnoběžných s půdorysnou $\pi(x, y)$. Parametrické vyjádření jednodílného hyperboloidu proto je

$$p(t, s) = [3 \cosh t \cdot \cos s ; 3 \cosh t \cdot \sin s ; 2 \sinh t], \quad t \in \mathbb{R}, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

- (b) Parametrický popis polomeridiánu (tj. poloviny z každé větve zadané hyperboly) je

$$m(t) = [0 ; \pm 3 \cosh t ; 2 \sinh t], \quad t \in \langle 0 ; +\infty \rangle.$$

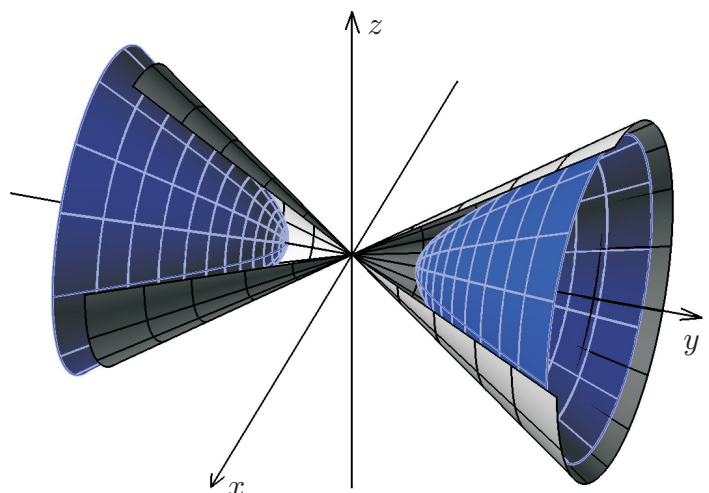
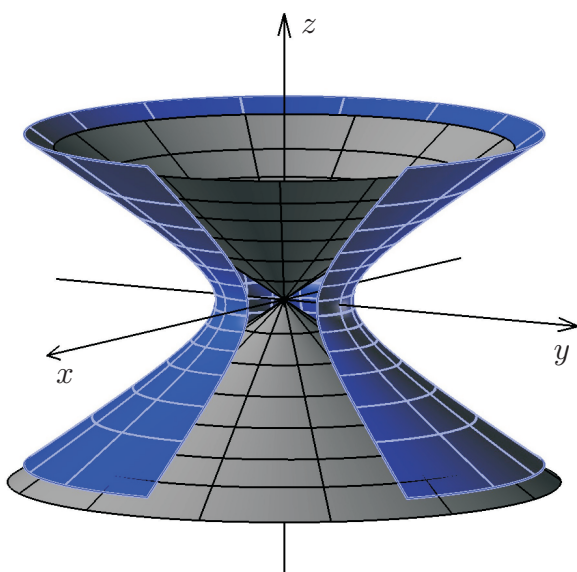
Body hyperboly opisují kružnice v rovinách rovnoběžných s nárysnou $\nu(x, z)$. Parametrické vyjádření dvojdílného hyperboloidu proto je

$$q(t, s) = [2 \sinh t \cdot \cos s ; \pm 3 \cosh t ; 2 \sinh t \cdot \sin s], \quad t \in \langle 0 ; +\infty \rangle, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

- (c) Jedna z asymptot zadané hyperboly má parametrický popis $a(t) = \left[0 ; t ; \frac{2}{3}t \right]$, $t \in \mathbb{R}$.

Otáčením kolem osy z vznikne kuželová plocha $\left[t \cos s ; t \sin s ; \frac{2}{3}t \right]$, $t \in \mathbb{R}, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$.

Otáčením kolem osy y vznikne kuželová plocha $\left[\frac{2}{3}t \cos s ; t ; \frac{2}{3}t \sin s \right]$, $t \in \mathbb{R}, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$.



Na obrázcích jsou části ploch pro hodnoty parametrů t a s :

jednodílný hyperboloid:

$$t \in \langle -2 ; 2 \rangle, s \in \langle \frac{\pi}{3} ; 2\pi \rangle$$

asymptotická kuželová plocha:

$$t \in \langle -12 ; 10 \rangle, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$$

dvojdílný hyperboloid:

$$t \in \langle 0 ; 2 \rangle, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$$

asymptotická kuželová plocha:

$$t \in \langle -10 ; 12 \rangle, s \in \langle \frac{\pi}{2} ; 2\pi \rangle$$

- 6** Napište parametrické vyjádření Küpperova konoidu, jehož řídící kružnice $k : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ leží v půdorysně $\pi(x,y)$, řídící přímka ℓ prochází bodem $[2; 0; 0]$ a je kolmá k půdorysně, řídící rovina je $\varphi : y + z = 0$.

Pozn.: Küpperův konoid je přímková plocha, jejíž povrchové přímky protínají řídící kružnici k , řídící přímku ℓ a jsou rovnoběžné s řídící rovinou φ .

Řešení

Nejprve sestavíme parametrické popisy řídících útvarů plochy

$$k(t) = [2 + 2 \cos t; 2 + 2 \sin t; 0], t \in \langle 0; 2\pi \rangle,$$

$$\ell(u) = [2; 0; u], u \in \mathbb{R}.$$

Na kružnici k zvolíme libovolný bod A , kterým chceme vést tvořící přímku plochy. Bodem A tedy proložíme rovinu α rovnoběžnou s řídící rovinou φ a sestrojíme průsečík B roviny α s řídící přímkou ℓ . Přímka $p = AB$ má požadované vlastnosti – protíná oba řídící útvary a je rovnoběžná s řídící rovinou.

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle$ získáme souřadnice bodu $A[2 + 2 \cos t_0; 2 + 2 \sin t_0; 0]$.

Určíme rovnici roviny $\alpha \parallel \varphi$ a průsečík roviny α a přímky ℓ .

$$\begin{aligned} \alpha: \quad & y + z + d = 0 \\ A \in \alpha: \quad & (2 + 2 \sin t_0) + 0 + d = 0 \\ & d = -(2 + 2 \sin t_0) \\ \alpha: \quad & y + z - (2 + 2 \sin t_0) = 0 \\ B = \alpha \cap \ell: \quad & u - (2 + 2 \sin t_0) = 0 \\ & u = (2 + 2 \sin t_0) \end{aligned}$$

$$B[2; 0; 2 + 2 \sin t_0]$$

Pozn.: Rovina φ (a také pomocná rovina α) svírá úhel 45° s rovinou kružnice k i s přímkou ℓ . To je vlastnost, kterou bychom mohli využít pro popis povrchové přímky p bez počítání průsečíků α a ℓ – y -ová souřadnice bodu A musí být stejná jako z -ová souřadnice bodu B .

Směrový vektor přímky p je

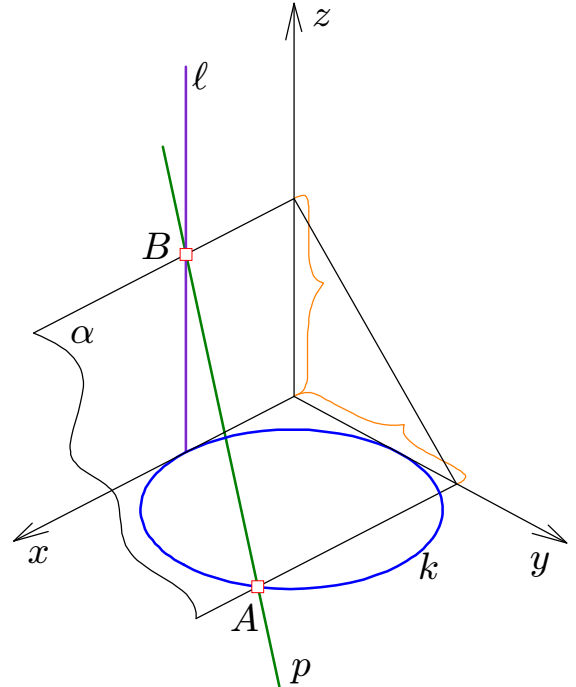
$$B - A = (-2 \cos t_0; -(2 + 2 \sin t_0); 2 + 2 \sin t_0).$$

Parametrický popis přímky p je

$$\begin{aligned} p: \quad x &= 2 + 2 \cos t_0 - (2 \cos t_0) \cdot s \\ y &= 2 + 2 \sin t_0 - (2 + 2 \sin t_0) \cdot s \\ z &= 0 + (2 + 2 \sin t_0) \cdot s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

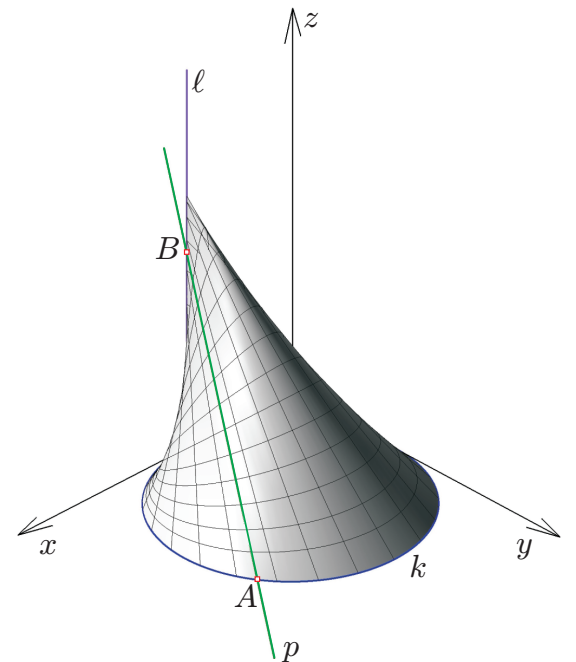
Parametrický popis Küpperova konoidu je

$$p(t,s) = [2 + 2 \cos t - s(2 \cos t); 2 + 2 \sin t - s(2 + 2 \sin t); s(2 + 2 \sin t)], \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle, s \in \mathbb{R}.$$



Na obrázku je znázorněna část plochy pro hodnoty parametrů

$$t \in \langle 0; 2\pi \rangle, s \in \langle 0; 1 \rangle.$$



- 7** Napište parametrické vyjádření plochy tečen šroubovice bodu $A[4; 0; 0]$. Pravotočivý šroubový pohyb je určen osou $o = z$ a redukovanou výškou závitu $v_0 = 2$.

Pozn.: Plocha tečen šroubovice je přímková plocha, kterou tvoří všechny tečny zadané šroubovice.

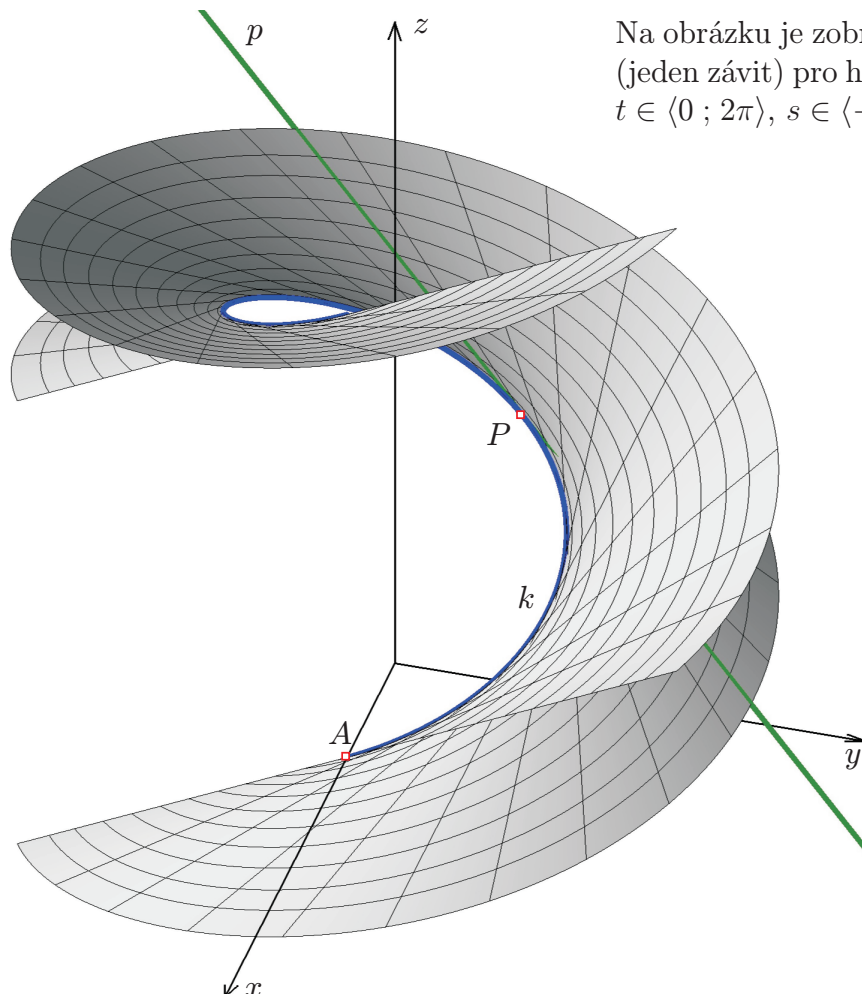
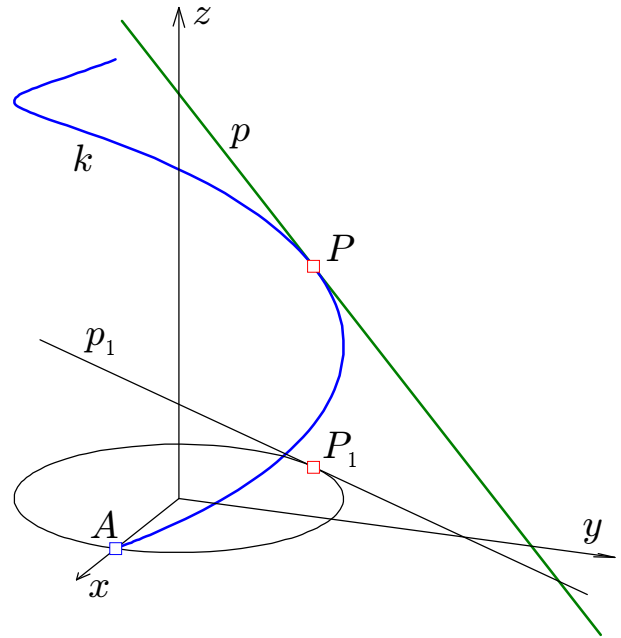
Řešení

Parametrický předpis zadané šroubovice bodu A je $k(t) = [4 \cos t; 4 \sin t; 2t]$, $t \in \mathbb{R}$. Tečné vektory této šroubovice jsou $k'(t) = (-4 \sin t; 4 \cos t; 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \mathbb{R}$ získáme souřadnice bodu šroubovice $P[4 \cos t_0; 4 \sin t_0; 2t_0]$ a směrového vektoru tečny šroubovice v tomto bodě $(-4 \sin t_0; 4 \cos t_0; 2)$. Parametrický popis tečny p dané šroubovice v bodě P je

$$\begin{aligned} p: x &= 4 \cos t_0 - 4 \sin t_0 \cdot s \\ y &= 4 \sin t_0 + 4 \cos t_0 \cdot s \\ z &= 2t_0 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Parametrický popis plochy tečen šroubovice bodu A je $p(t, s) = [4 \cos t - 4s \sin t; 4 \sin t + 4s \cos t; 2t + 2s]$, $t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$.



Na obrázku je zobrazena část plochy (jeden závit) pro hodnoty parametrů $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle -2; 2 \rangle$.

- 8** Napište parametrické vyjádření plochy sv. Jiljí. Plocha vznikne šroubovým pohybem kružnice $k : (x-2)^2 + z^2 = 1$, která leží v nárysně $\nu(x, z)$.

Pravotočivý šroubový pohyb je určen osou $o = z$, redukovaná výška závitu je $v_0 = \frac{3}{2}$.

Řešení

Parametrický popis zadané kružnice je $k(t) = [2 + \cos t ; 0 ; \sin t]$, $t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$.

Parametrický popis šroubovice bodu $B[a ; 0 ; b]$, která má osu $o = z$ a redukovanou výšku závitu v_0 je

$$\ell(s) = [a \cdot \cos s ; a \cdot \sin s ; b + v_0 \cdot s], s \in \mathbb{R}.$$

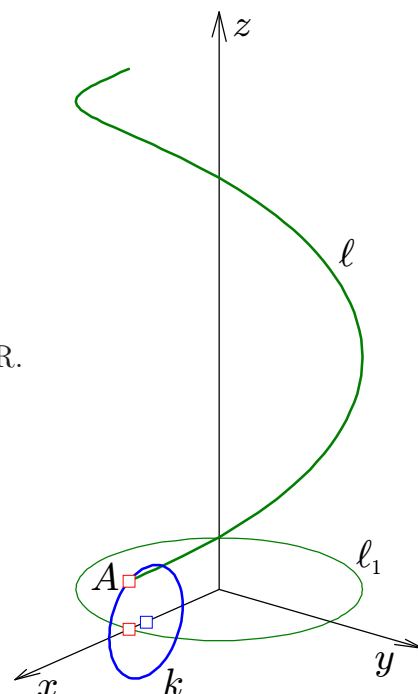
Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$ získáme souřadnice bodu A kružnice k : $A[2 + \cos t_0 ; 0 ; \sin t_0]$. Šroubovice bodu A má parametrický popis:

$$\ell(s) = \left[\underbrace{(2 + \cos t_0)}_a \cdot \cos s ; \underbrace{(2 + \cos t_0)}_a \cdot \sin s ; \underbrace{\sin t_0}_b + \underbrace{\frac{3}{2}}_{v_0} \cdot s \right], s \in \mathbb{R}.$$

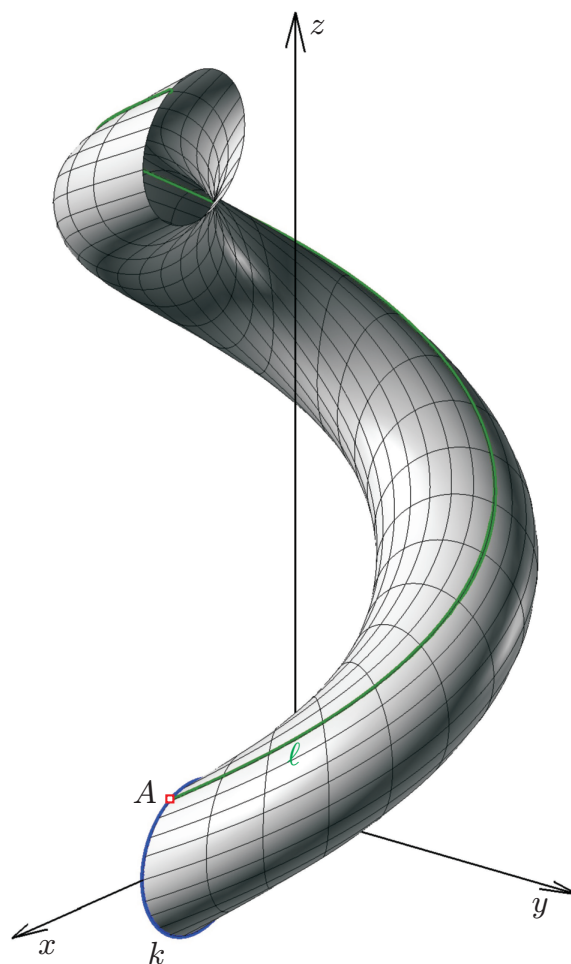
Parametrický popis šroubové plochy sv. Jiljí je

$$p(t, s) = \left[(2 + \cos t) \cos s ; (2 + \cos t) \sin s ; \sin t + \frac{3}{2}s \right],$$

$$t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle, s \in \mathbb{R}.$$



Na obrázku je zobrazena část plochy (jeden zvit) pro hodnoty parametrů $t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$.



9 Zjistěte, jaká plocha je popsána rovnicí

$$9x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 36x - 24y - 8z + 32 = 0.$$

Určete parametrické vyjádření křivek plochy v rovinách

$$\alpha : y = 3, \quad \beta : z = -1.$$

Řešení

Upravíme obecnou rovnici plochy na středový tvar.

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 36x - 24y - 8z + 32 &= 0 \\ (9x^2 - 36x) + (4y^2 - 24y) + (-4z^2 - 8z) + 32 &= 0 \\ &\vdots \\ 9(x-2)^2 + 4(y-3)^2 - 4(z+1)^2 &= 36 \\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(z+1)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Plocha je *jednodílný eliptický hyperboloid* se středem $S[2; 3; -1]$.

V rovině $\alpha : y = 3$ leží na ploše hyperbola k s parametrickým předpisem

$$k(t) = [\pm 2 \cosh t + 2; 3; 3 \sinh t - 1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

V rovině $\beta : z = -1$ leží na ploše elipsa ℓ s parametrickým předpisem

$$\ell(s) = [2 \cos s + 2; 3 \sin s + 3; -1], \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

10 Je dána plocha

$$p(t, s) = [t \cos s, (t-4)^2, t \sin s], \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Napište obecné rovnice tečných rovin plochy v bodech

$$P = p(0, 0), \quad Q = p\left(8, \frac{\pi}{2}\right).$$

Řešení

(a) Určíme souřadnice bodu $P = p(0, 0) = [0; 16; 0]$.

Volbou hodnoty parametru $s = 0$ získáme předpis t -křivky

$$k(t) = p(t, 0) = [t; (t-4)^2; 0], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (1; 2(t-4); 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Tečný vektor v bodě P je $k'(0) = (1; -8; 0)$.

Volbou hodnoty parametru $t = 0$ získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(0, s) = [0; 16; 0].$$

Křivka se redukuje na bod, $\ell'(0) = (0; 0; 0)$.

Bod P je singulární.

(b) Určíme souřadnice bodu $Q = (8, \frac{\pi}{2}) = [0; 16; 8]$.

Volbou hodnoty parametru $s = \frac{\pi}{2}$ získáme předpis t -křivky

$$k(t) = p\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = [0; (t-4)^2; t], t \in \mathbb{R}.$$

Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (0; 2(t-4); 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Tečný vektor v bodě Q je $k'(8) = (0; 8; 1)$.

Volbou hodnoty parametru $t = 8$ získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(8, s) = [8 \cos s; 16; 8 \sin s], s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(t) = (-8 \sin s; 0; 8 \cos s)$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Tečný vektor v bodě Q je $\ell'(\frac{\pi}{2}) = (-8; 0; 0)$.

Normálový vektor tečné roviny τ získáme jako vektorový součin

$$k'(8) \times \ell'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0; 8; 1) \times (-8; 0; 0) = (0; -8; 64) \sim (0; -1; 8).$$

Určíme obecnou rovnici roviny τ .

$$\begin{aligned} \tau: \quad & -y + 8z + d = 0 \\ Q \in \tau: \quad & -16 + 64 + d = 0 \\ & d = -48 \end{aligned}$$

$$\tau: \quad -y + 8z - 48 = 0$$

11 Napište parametrické vyjádření kruhového konoidu.

Řídící půlkružnice leží v nárysně nad osou x , $k: (x-6)^2 + z^2 = 36$,

řídící přímka $\ell = PL$, $P[8; 9; 0]$, $L[0; 9; 8]$,

řídící rovina je bokorysna $\varphi = \mu(y, z)$.

Řešení

Parametrická vyjádření řídící půlkružnice a přímky jsou

$$k(t) = [6 \cos t + 6; 0; 6 \sin t], t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

$$\ell(u) = [8 + u; 9; -u], u \in \mathbb{R}.$$

Na kružnici k zvolíme libovolný bod A , kterým chceme vést tvořící přímku plochy. Bodem A tedy proložíme rovinu α rovnoběžnou s řídící rovinou φ a sestrojíme průsečík B roviny α s řídící přímkou ℓ . Přímka $p = AB$ má požadované vlastnosti – protíná oba řídící útvary a je rovnoběžná s řídící rovinou.

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \langle 0; \pi \rangle$ získáme souřadnice bodu

$$A[6 \cos t_0 + 6; 0; 6 \sin t_0].$$

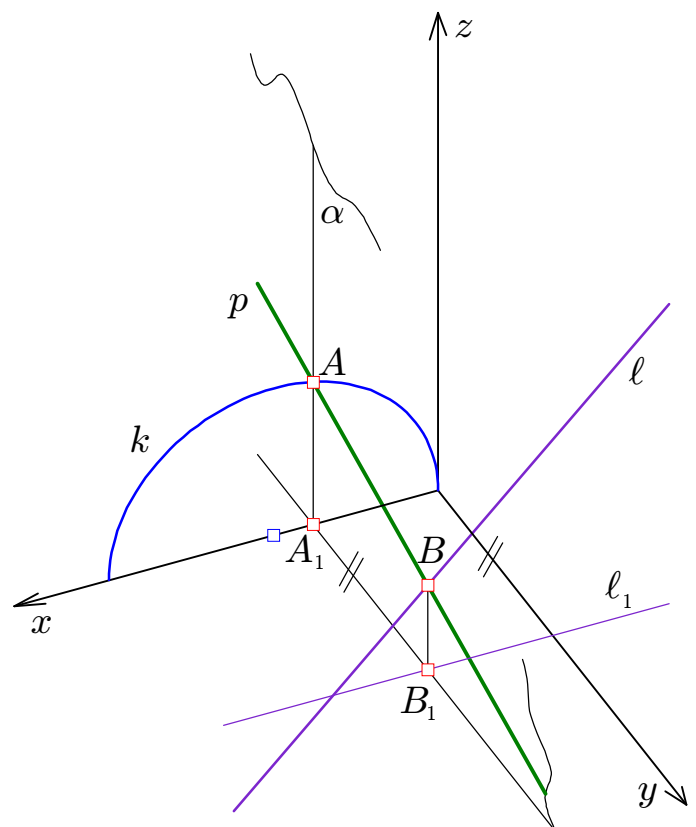
Určíme rovnici roviny $\alpha \parallel \mu$.

$$\alpha: \quad x + d = 0$$

$$A \in \alpha: \quad 6 \cos t_0 + 6 + d = 0$$

$$d = -(6 \cos t_0 + 6)$$

$$\alpha: \quad x - (6 \cos t_0 + 6) = 0$$



Průsečík B roviny α a přímky ℓ :

$$\begin{aligned}(8 + u) - (6 \cos t_0 + 6) &= 0 \\ u &= 6 \cos t_0 - 2\end{aligned}$$

$$B[6 \cos t_0 + 6 ; 9 ; -6 \cos t_0 + 2]$$

Směrový vektor tvořící přímky p je

$$B - A = (0 ; 9 ; -6 \sin t_0 - 6 \cos t_0 + 2).$$

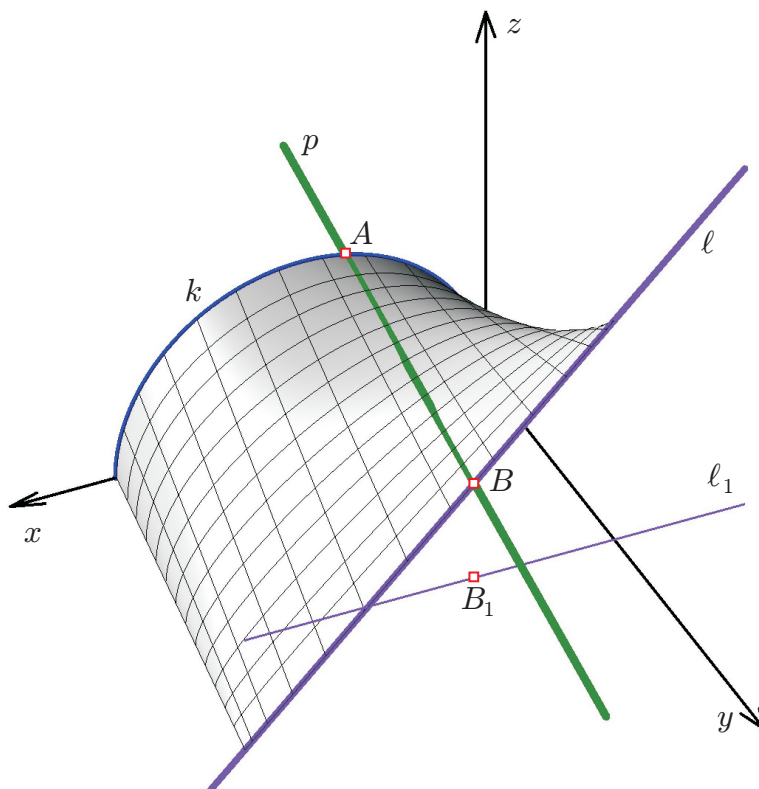
Parametrický popis přímky p je

$$\begin{aligned}p : x &= 6 \cos t_0 + 6 \\ y &= 0 + 9s \\ z &= 6 \sin t_0 + s \cdot (-6 \sin t_0 - 6 \cos t_0 + 2), \quad s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Parametrický popis kruhového konoidu je

$$p(t,s) = [6 \cos t + 6 ; 9s ; 6 \sin t + s \cdot (-6 \sin t - 6 \cos t + 2)], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Na obrázku je znázorněna část plochy pro hodnoty parametrů $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $s \in \langle 0, 1 \rangle$.



12 Zjistěte, jaká plocha je popsána rovnicí

$$16x^2 + 9y^2 - 36y - 108 = 0.$$

Určete parametrické vyjádření křivek plochy v rovinách

$$\alpha : x = 0, \quad \beta : z = 4.$$

Řešení

Upravíme obecnou rovnici plochy na středový tvar.

$$\begin{aligned} 16x^2 + 9y^2 - 36y - 108 &= 0 \\ 16x^2 + 9(y^2 - 4y) - 108 &= 0 \\ 16x^2 + 9(y^2 - 4y + 4) - 36 - 108 &= 0 \\ 16x^2 + 9(y - 2)^2 &= 144 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Plocha je *eliptický válec*. Přímký plochy jsou rovnoběžné s osou z .

V rovině $\alpha: x = 0$ leží na ploše dvě přímky:

$$\begin{aligned} (y - 2)^2 &= 16 & p(t) &= [0 ; 6 ; t], t \in \mathbb{R} \\ |y - 2| &= 4 & q(t) &= [0 ; -2 ; t], t \in \mathbb{R} \\ y &= 6 \quad \text{nebo} \quad y = -2 \end{aligned}$$

V rovině $\beta: z = 4$ leží na ploše elipsa s parametrickým předpisem

$$e(t) = [3 \cos t ; 4 \sin t + 2 ; 4], t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

13 Je dána plocha

$$p(t, s) = [3t(1 - s) ; t^2(1 - s) ; t^2s], t, s \in \mathbb{R}.$$

Napište obecné rovnice tečných rovin plochy v bodě $P[0, 0, 4]$.

Řešení

Určíme hodnoty parametrů t a s pro které platí

$$\begin{aligned} 3t(1 - s) &= 0, \\ t^2(1 - s) &= 0, \\ t^2s &= 4. \end{aligned}$$

Těmto rovnicím odpovídají $t = 2, t = -2, s = 1$. Tedy bod $P = p(2, 1) = p(-2, 1)$.

(a) Nejprve určíme tečnou rovinu v bodě $P = p(2, 1)$.

Dosazením hodnoty parametru $s = 1$ do p získáme předpis t -křivky

$$k(t) = p(t, 1) = [0 ; 0 ; t^2], t \in \mathbb{R}.$$

Tečné vektory křivky k jsou $k'(t) = (0 ; 0 ; 2t), t \in \mathbb{R}$.

Tečný vektor v bodě P je $k'(2) = (0 ; 0 ; 4)$.

Dosazením hodnoty parametru $t = 1$ do p získáme předpis s -křivky

$$\ell(s) = p(2, s) = [6(1 - s) ; 4(1 - s) ; 4s], s \in \mathbb{R}.$$

Tečné vektory křivky ℓ jsou $\ell'(s) = (-6 ; -4 ; 4)$.

Tečný vektor v bodě P je $\ell'(1) = (-6 ; -4 ; 4)$.

Normálový vektor tečné roviny α získáme jako vektorový součin:

$$(0 ; 0 ; 4) \times (-6 ; -4 ; 4) = (16 ; -24 ; 0) \sim (2 ; -3 ; 0).$$

Určíme obecnou rovnici roviny α .

$$\begin{array}{lcl} \alpha : & 2x - 3y + d & = 0 \\ P \in \alpha : & d & = 0 \end{array}$$

$$\alpha : \quad 2x - 3y = 0$$

(b) Dále určíme tečnou rovinu v bodě $P = p(-2, 1)$.

Dosazením hodnoty parametru $s = 1$ do p získáme předpis t -křivky

$$m(t) = p(t, 1) = [0 ; 0 ; t^2], t \in \mathbb{R}.$$

Tečné vektory křivky m jsou $m'(t) = (0 ; 0 ; 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Tečný vektor v bodě P je $m'(-2) = (0 ; 0 ; -4)$.

Dosazením hodnoty parametru $t = -2$ do p získáme předpis s -křivky

$$n(s) = p(-2, s) = [-6(1 - s) ; 4(1 - s) ; 4s], s \in \mathbb{R}.$$

Tečné vektory křivky n jsou $n'(s) = (6 ; -4 ; 4)$.

Tečný vektor v bodě P je $n'(1) = (6 ; -4 ; 4)$.

Normálový vektor tečné roviny β získáme jako vektorový součin:

$$(0 ; 0 ; -4) \times (6 ; -4 ; 4) = (-2 ; -3 ; 0) \sim (2 ; 3 ; 0).$$

Určíme obecnou rovnici roviny α .

$$\begin{array}{lcl} \beta : & 2x + 3y + d & = 0 \\ P \in \beta : & d & = 0 \end{array}$$

$$\beta : \quad 2x + 3y = 0$$

- 14** Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne rotací přímky $p = PQ$ kolem osy y , $P[0 ; 0 ; 4]$, $Q[5 ; 12 ; 0]$.

Řešení

Směrový vektor přímky $p = PQ$ je $Q - P = (5 ; 12 ; -4)$.

Parametrický popis přímky p je

$$p(t) = [5t ; 12t ; 4 - 4t], t \in \mathbb{R}.$$

Volbou konkrétní hodnoty parametru $t_0 \in \mathbb{R}$ získáme souřadnice bodu $A[5t_0 ; 12t_0 ; 4 - 4t_0]$.

Bod A se při rotaci kolem osy y pohybuje po rovnoběžkové kružnici k o středu $[0 ; 12t_0 ; 0]$ a poloměru $\sqrt{(5t_0)^2 + (4 - 4t_0)^2}$.

- a** Jeden z možných parametrických popisů rovnoběžkové kružnice bodu A je

$$k(s) = \left[\sqrt{(5t_0)^2 + (4 - 4t_0)^2} \cdot \cos s ; 12t_0 ; \sqrt{(5t_0)^2 + (4 - 4t_0)^2} \cdot \sin s \right], \\ s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis rotační plochy je

$$p(t, s) = \left[\sqrt{(5t)^2 + (4 - 4t)^2} \cdot \cos s ; 12t ; \sqrt{(5t)^2 + (4 - 4t)^2} \cdot \sin s \right], t \in \mathbb{R}, s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

- b** Jiná parametrizace rovnoběžkové kružnice, která má počáteční bod $\bar{k}(0) = A$, je

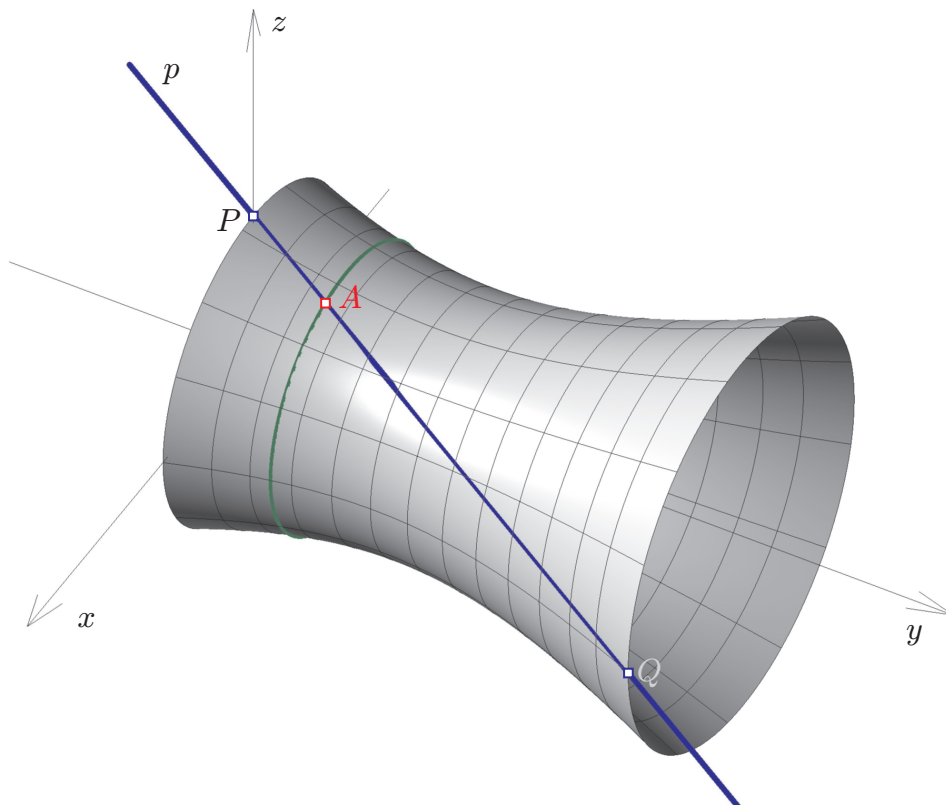
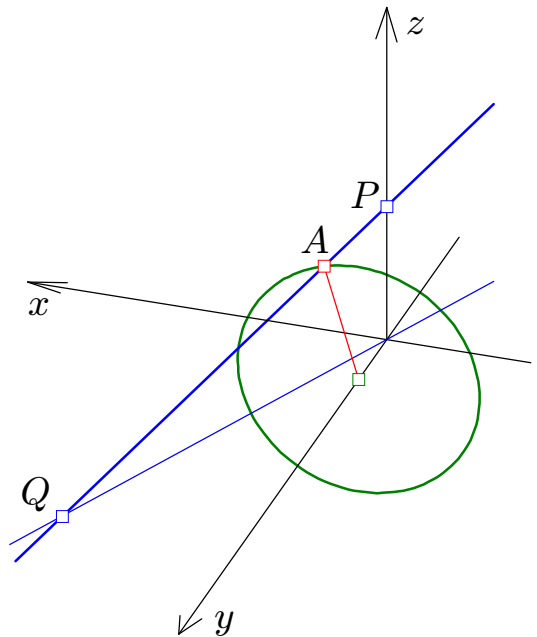
$$\bar{k}(s) = [5t_0 \cdot \cos s - (4 - 4t_0) \cdot \sin s ; 12t_0 ; (4 - 4t_0) \cdot \cos s + 5t_0 \cdot \sin s], s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis rotační plochy s takto popsanou rovnoběžkovou kružnicí je

$$p(t, s) = [5t \cos s - (4 - 4t) \sin s ; 12t ; (4 - 4t) \cos s + 5t \sin s], t \in \mathbb{R}, s \in \langle 0 ; 2\pi \rangle.$$

Plocha je *jednodílný rotační hyperboloid*.

Na obrázku je znázorněna část plochy pro hodnoty parametrů $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



15 Napište parametrické vyjádření šroubové plochy plochy, která je dána

- přímkou $p = PQ$, $P[0; 0; 4]$, $Q[5; 12; 0]$;
- šroubovým pohybem: levotočivý, $o = y$, výška závitu $v = 18$.

Řešení

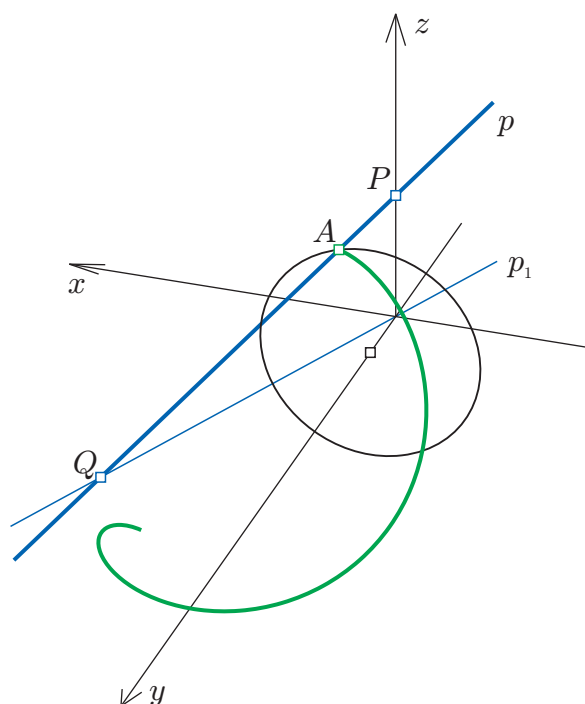
V předchozím příkladu jsme odvodili souřadnice bodu A na přímce p :

$$A[5t_0; 12t_0; 4 - 4t_0].$$

Parametrický popis levotočivé šroubovice bodu A je

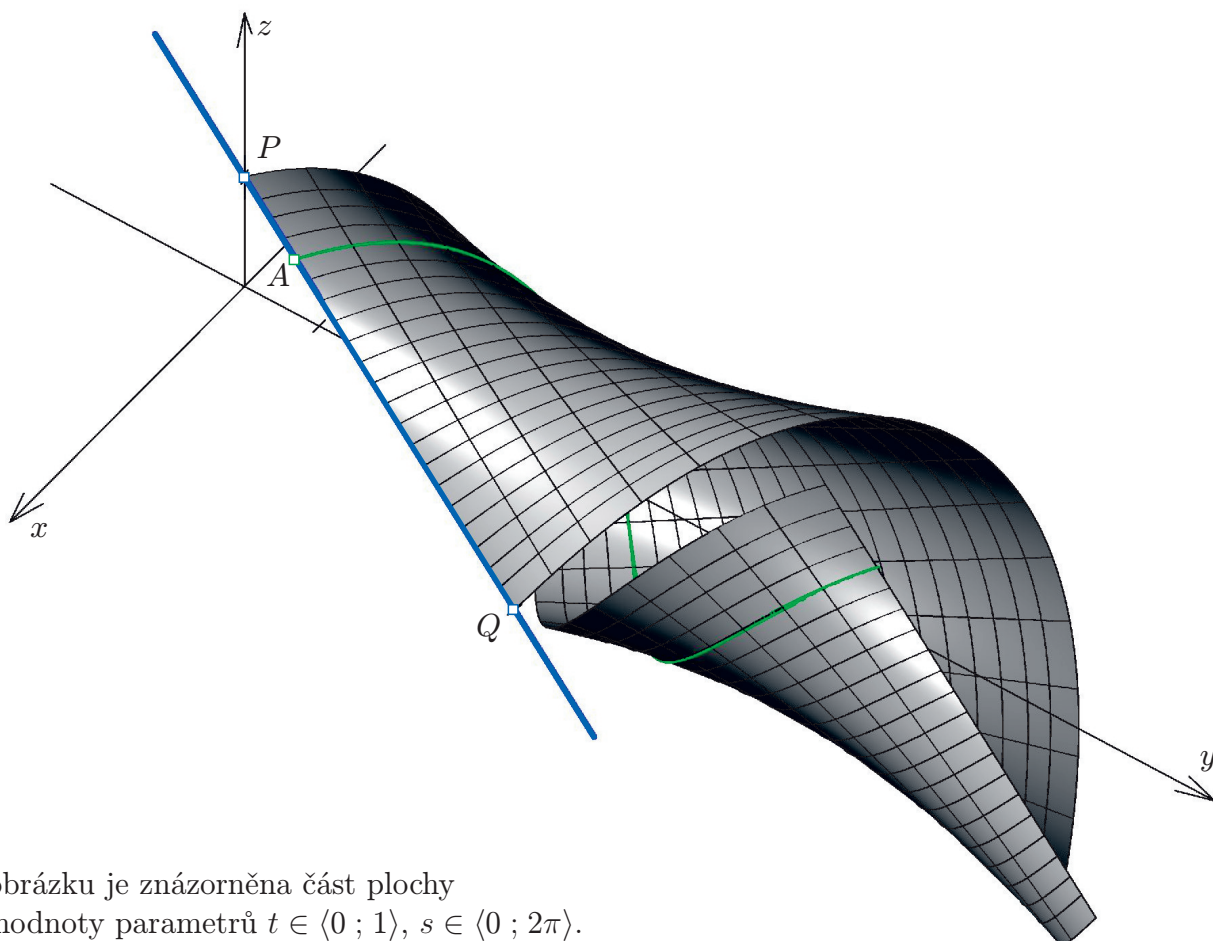
$$k(s) = \begin{bmatrix} 5t_0 \cdot \cos s - (4 - 4t_0) \cdot \sin s; \\ 12t_0 + \frac{9}{\pi} \cdot s; \\ (4 - 4t_0) \cdot \cos s + 5t_0 \cdot \sin s \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

(na obrázku je zobrazen jeden závit šroubovice, porovnejte s popisem kružnice v předchozím příkladu).



Uvolněním parametru t získáme popis levotočivé šroubové plochy, kterou vytváří přímka p :

$$p(t,s) = \begin{bmatrix} 5t \cos s - (4 - 4t) \sin s; \\ 12t + \frac{9}{\pi} s; \\ (4 - 4t) \cos s + 5t \sin s \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$



Na obrázku je znázorněna část plochy pro hodnoty parametrů $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.