

Parametrické vyjádření rotačních a šroubových ploch

Michal Šesták

Maturitní práce
2013/2014

Smíchovská střední průmyslová škola
Fakulta architektury ČVUT

Vedoucí práce: *Mgr. Zbyšek Nechanický*

Oponenti: *RNDr. Alena Rybáková, RNDr. Vladimíra Hájková, Ph.D.*



Obsah

1	Parametrické vyjádření kuželoseček	2
2	Rotační plochy	9
2.1	Rotační kvadratické plochy	9
2.2	Další rotační plochy	17
2.3	Příklady na procvičení	20
3	Šroubové plochy	21
3.1	Přímkové šroubové plochy	21
3.2	Cyklické šroubové plochy	28
3.3	Další šroubové plochy	32
3.4	Příklady na procvičení	33
4	Tečné roviny ploch	34
5	Praktické využití	40
6	Výsledky	48

1 Parametrické vyjádření kuželoseček

V této kapitole připomeneme parametrický popis kuželoseček a popis jejich tečen na konkrétních příkladech. Neuvádíme zde žádné odvození, to je obsahem práce studenta Jana Suchomela: Parametrický popis křivek.

Příklad č. 1

Je dána kružnice k o středu $S[2; -3]$ a poloměru $r = 3$. Napište středový tvar obecné rovnice této kružnice. Napište parametrické vyjádření této kružnice.

Řešení

Středový tvar obecné rovnice je:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

Parametrických popisů kružnice je mnoho. My budeme potřebovat popsat kružnici (jeden oběh) se zadaným výchozím bodem a zadaným směrem oběhu (kladný nebo záporný směr).

Vypočítejme průsečíky kružnice s osou y ($x = 0$).

$$(-2)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

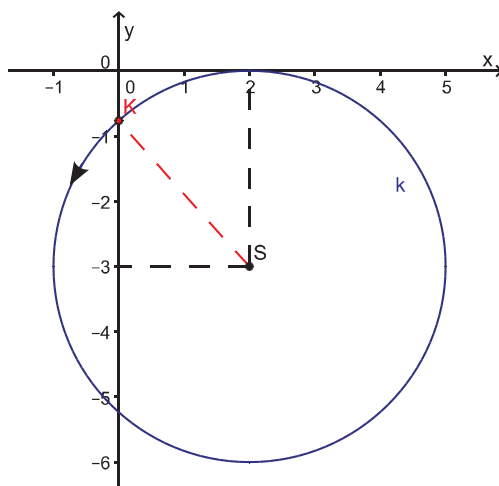
$$(y + 3)^2 = 5$$

$$y_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$$

Nechť je výchozím bodem při jednom oběhu kružnice ($t \in \langle 0; 2\pi \rangle$) bod $K[0; -3 + \sqrt{5}]$ a kružnice je probíhána v kladném směru (tj. v protisměru hodinových ručiček).

Parametrický popis pak je:

$$k(t) = [2 - 2 \cos t - \sqrt{5} \sin t; -3 + \sqrt{5} \cos t - 2 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 1: Kružnice

Příklad č. 2

Bod $V[-6; 7]$ je vrcholem paraboly, parametr paraboly je $p = 2$, osa paraboly o je

- 1) rovnoběžná s osou x ,
- 2) rovnoběžná s osou y .

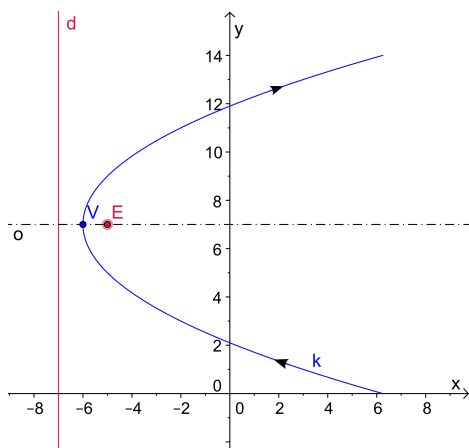
Napište vrcholový tvar obecných rovnic všech parabol, které vyhovují zadání. Napište parametrické vyjádření těchto parabol.

Řešení

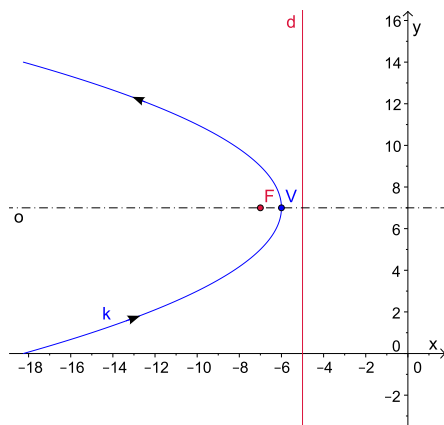
- 1) Zadání vyhovují dvě paraboly, buď je ohnisko bod $E[-6 + \frac{p}{2}; 7] = [-5; 7]$ nebo bod $F[-6 - \frac{p}{2}; 7] = [-7; 7]$.

Vrcholový tvar obecné rovnice paraboly s ohniskem E je $(y - 7)^2 = 4(x + 6)$ a parametrické vyjádření je $k(t) = \left[\frac{t^2}{4} - 6; t + 7 \right]; \quad t \in \mathbb{R}$.

Vrcholový tvar obecné rovnice paraboly s ohniskem F je $(y - 7)^2 = -4(x + 6)$ a parametrické vyjádření je $k(t) = \left[-\frac{t^2}{4} - 6; t + 7 \right]; \quad t \in \mathbb{R}$.



Obrázek 2: Parabola s ohniskem E ; $t \in \langle -7; 7 \rangle$

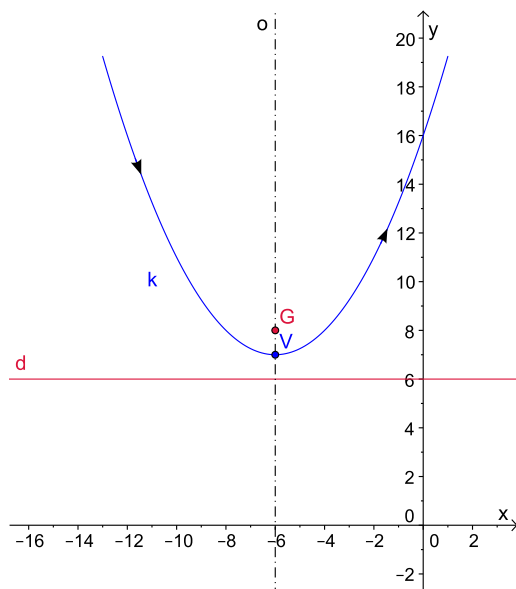


Obrázek 3: Parabola s ohniskem F ; $t \in \langle -7; 7 \rangle$

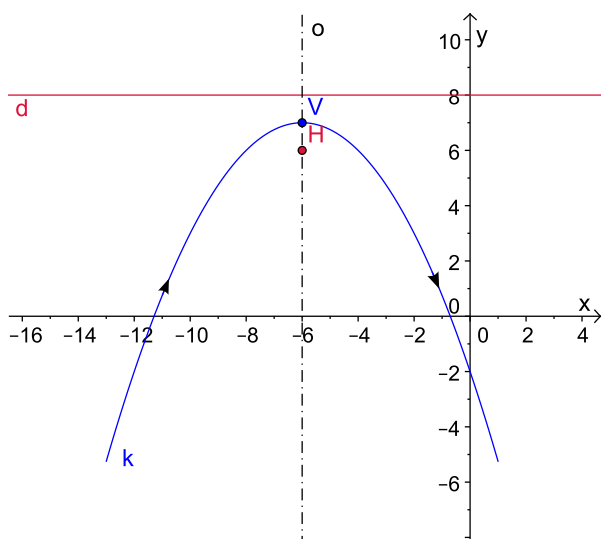
- 2) Zadání vyhovují dvě paraboly, buď je ohnisko bod $G \left[-6; 7 + \frac{p}{2}\right] = [-6; 8]$ nebo bod $H \left[-6; 7 - \frac{p}{2}\right] = [-6; 6]$.

Vrcholový tvar obecné rovnice paraboly s ohniskem G je $(x + 6)^2 = 4(y - 7)$ a parametrické vyjádření je $k(t) = \left[t - 6; \frac{t^2}{4} + 7\right]; \quad t \in \mathbb{R}$.

Vrcholový tvar obecné rovnice paraboly s ohniskem H je $(x + 6)^2 = -4(y - 7)$ a parametrické vyjádření je $k(t) = \left[t - 6; -\frac{t^2}{4} + 7\right]; \quad t \in \mathbb{R}$.



Obrázek 4: Parabola s ohniskem G ; $t \in \langle -7; 7 \rangle$



Obrázek 5: Parabola s ohniskem H ; $t \in \langle -7; 7 \rangle$

Příklad č. 3

Bod $S[1;1]$ je střed elipsy, hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x , velikost hlavní poloosy $a = 2$, velikost vedlejší poloosy $b = 1$. Napište středový tvar obecné rovnice této elipsy, napište také její parametrické vyjádření. Dále napište souřadnice průsečíků elipsy se souřadnicovými osami a napište obecné rovnice tečen elipsy v těchto bodech

Řešení

Středový tvar rovnice elipsy je:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

Využijeme vzorec $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ a dáme do rovností $\frac{x-1}{2} = \cos t$ a $\frac{y-1}{1} = \sin t$. Odsud získáme parametrický popis elipsy:

$$k(t) = [1 + 2 \cos t; 1 + \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Pro popis tečen využijeme parametrický tvar. Nejprve určíme průsečíky elipsy s osou x ($y = 0$):

$$\begin{aligned} 1 + \sin t &= 0 \\ \sin t &= -1 \\ t &= \frac{3\pi}{2} \quad (\text{řešení v intervalu } \langle 0; 2\pi \rangle). \end{aligned}$$

Průsečík s osou x je bod $D = k\left(\frac{3\pi}{2}\right) = [1; 0]$ (vedlejší vrchol elipsy).

Vypočítáme průsečíky elipsy s osou y ($x = 0$):

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos t &= 0 \\ \cos t &= -\frac{1}{2} \\ t &\in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\} \quad (\text{řešení v } \langle 0; 2\pi \rangle). \end{aligned}$$

Průsečíky s osou y jsou body $T = k\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[0; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ a $U = k\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left[0; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Vypočítáme tečné vektory elipsy: $k'(t) = (-2 \sin t; \cos t)$.

Pro průsečíky D, T, U získáme směrové vektory tečen dosazením:

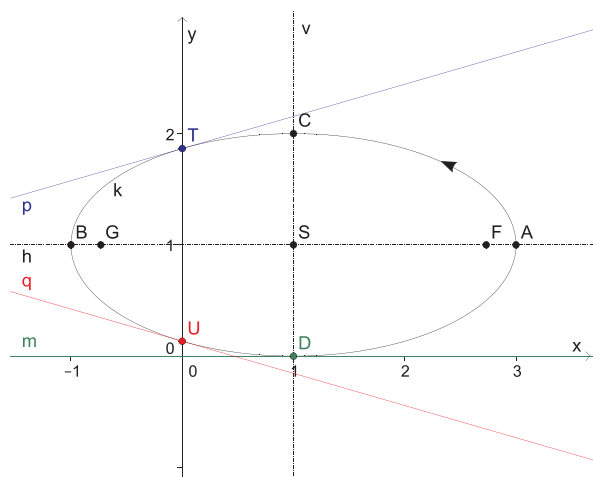
$$\begin{aligned} D &= k\left(\frac{3\pi}{2}\right) = [1; 0] \quad \text{a} \quad k'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (2; 0), \\ T &= k\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[0; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{a} \quad k'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}), \\ U &= k\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left[0; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{a} \quad k'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = (\sqrt{3}; -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Nyní již napíšeme obecné rovnice tečen:

tečna v bodě D je přímka m : $y = 0$ (osa x),

tečna v bodě T je přímka p : $x - 2\sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 3 = 0$,

tečna v bodě U je přímka q : $x + 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} + 3 = 0$.



Obrázek 6: Elipsa s tečnami

Příklad č. 4

Body $A[2; 2]$ a $B[2; 10]$ jsou hlavní vrcholy elipsy, velikost vedlejší poloosy je $b = 1$. Napište středový tvar obecné rovnice elipsy. Napište parametrické vyjádření elipsy (1 oběh, $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$), výchozí bod necht' je bod A , elipsa je probíhána v záporném směru.

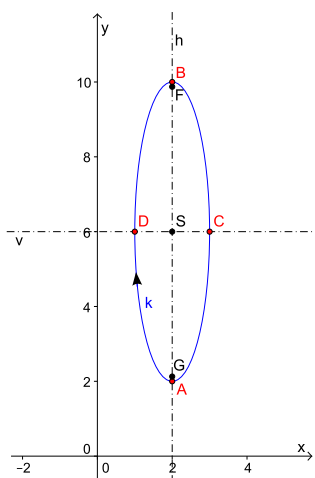
Řešení

Střed elipsy je bod $S[2; 6]$, velikost hlavní poloosy je $a = 4$ a středový tvar rovnice je:

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1.$$

V parametrickém popisu bude v x -ové souřadnici funkce $\sin$ a v y -ové souřadnici funkce $\cos$. Vhodnou volbou znamének u těchto funkcí dostaneme požadované parametrické vyjádření: Parametrický tvar:

$$k(t) = [2 - \sin t; 6 - 4 \cos t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 7: Elipsa

Příklad č. 5

Bod $S[3; -9]$ je střed hyperboly, osy hyperboly jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, velikost hlavní poloosy je $a = 3$, velikost vedlejší poloosy je $b = 2$. Napište středový tvar obecných rovnic všech hyperbol, které vyhovují zadání. Napište obecné rovnice asymptot. Napište parametrické vyjádření těchto hyperbol.

Řešení

- 1) Hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou x , středový tvar je:

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+9)^2}{4} = 1.$$

Obecné rovnice asymptot získáme z:

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+9)^2}{4} &= 0 \\ 4(x-3)^2 - 9(y+9)^2 &= 0 \\ [2(x-3) - 3(y+9)] \cdot [2(x-3) + 3(y+9)] &= 0, \end{aligned}$$

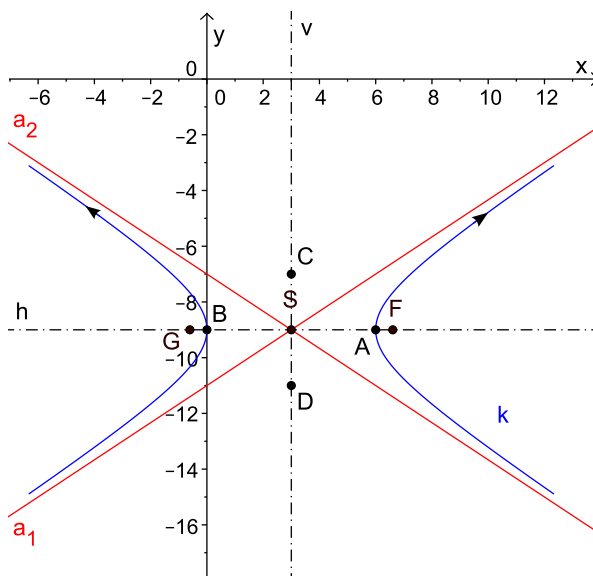
tedy $a_1 : 2x - 3y - 33 = 0$ a $a_2 : 2x + 3y + 21 = 0$.

Pro parametrický popis využijeme vzorec $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$ a dáme do rovností $\frac{x-3}{3} = \cosh t$ a $\frac{y+9}{2} = \sinh t$. Získáme parametrický popis jedné větve:

$$k(t) = [3 + 3 \cosh t; -9 + 2 \sinh t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro obě větve je:

$$k(t) = [3 \pm 3 \cosh t; -9 + 2 \sinh t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 8: Hyperbola pro $t \in \langle -1.8; 1.8 \rangle$

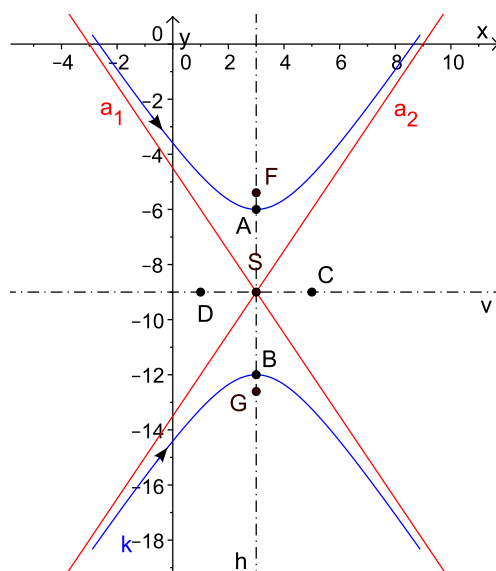
2) Hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou y , středový tvar její rovnice je:

$$-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+9)^2}{9} = 1$$

Rovnice asymptot jsou $a_1 : 3x + 2y + 9 = 0$ a $a_2 : 3x - 2y - 27 = 0$.

Parametrický popis obou větví je:

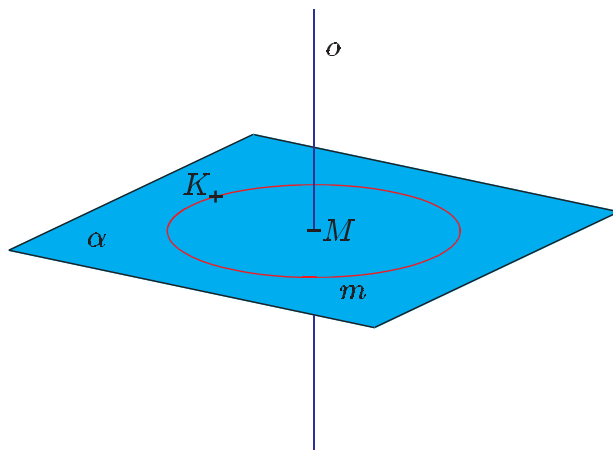
$$k(t) = [3 + 2 \sinh t; -9 \pm 3 \cosh t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 9: Hyperbola pro $t \in \langle -1.8; 1.8 \rangle$

2 Rotační plochy

Rotační pohyb je v prostoru zadán osou rotace o . Zadaný bod K , který neleží na ose o , se při rotaci pohybuje po kružnici m . Tato kružnice leží v rovině α , která prochází bodem K a je kolmá k ose o . Označme M průsečík osy o a roviny α , je to střed kružnice m , poloměr kružnice m je roven vzdálenosti bodů K a M .



Obrázek 10: Ilustrační obrázek

Rotační plocha vznikne rotací křivky k při zadaném rotačním pohybu (křivka k neleží v rovině kolmé k ose rotace o). Každý bod křivky k se pohybuje po tzv. rovnoběžkové kružnici.

Uvažujme libovolnou rovinu ρ , která prochází osou o . Průnik roviny ρ a rotační plochy je křivka zvaná poledník (meridián). Je to křivka souměrná podle osy o , jedna ze souměrných částí se nazývá polomeridián.

2.1 Rotační kvadratické plochy

Rotační kvadratické plochy vznikají buď rotací přímky kolem zadané osy rotace nebo rotací kuželosečky (elipsy, kružnice, paraboly, hyperboly) kolem některé z jejích os.

Plochy se nazývají kvadratické, protože mohou být popsány pomocí kvadratického polynomu v proměnných x, y a z . Například $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ je rovnice jedné z rotačních kvadratických ploch, je to kulová plocha o středu $O[0; 0; 0]$ a poloměru r .

Nejdříve si popíšeme přímkové rotační kvadratické plochy. Pro jednoduchost za osu rotace bereme vždy souřadnicovou osu z . V prvním příkladě si ukážeme podrobně postup, v dalších příkladech bude zápis kratší.

Příklad č. 1

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne rotací přímky k . Přímka k prochází bodem $[4; -3; 0]$ a je rovnoběžná s osou rotace.

Řešení

Začneme parametrickým popisem přímky k :

$$k(t) = [4; -3; t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zadaná přímka je polomeridiánem plochy a výsledná plocha je rotační válcová plocha. Každý bod přímky k se pohybuje po rovnoběžkové kružnici.

Zvolme si pevně (ale libovolně) bod K přímky k : $K = k(t_0) = [4; -3; t_0]$. Nyní popíšeme rovnoběžkovou kružnici m bodu K v rovině $\alpha : z = t_0$. Kružnici m můžeme popsat různě:

$$m(s) = [4 \cos s + 3 \sin s; -3 \cos s + 4 \sin s; t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle \text{ (1 oběh)}.$$

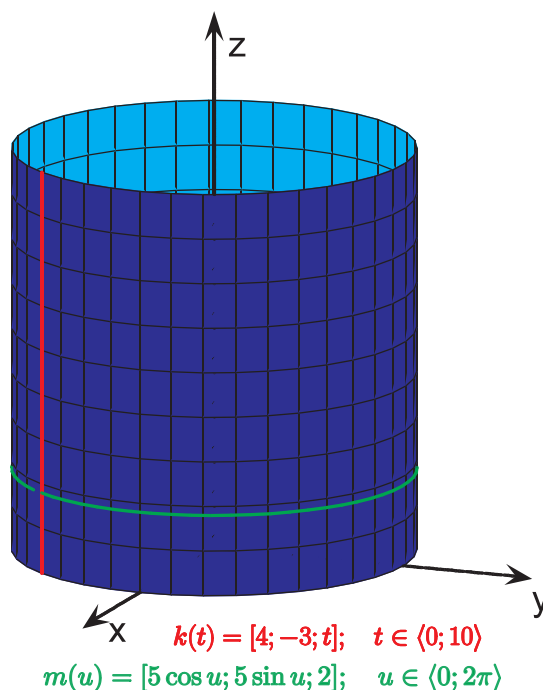
Nebo můžeme určit poloměr r . Střed kružnice m je bod $M[0; 0; t_0]$ a $r = |MK| = \sqrt{16 + 9} = 5$. Jiná parametrizace je: $m(u) = [5 \cos u; 5 \sin u; t_0]; \quad u \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Parametrický popis plochy získáme tak, že nyní budeme měnit bod K přímky k (uvolníme fixovaný parametr t_0 , tedy zaměníme t za t_0):

$$p(t, s) = [4 \cos s + 3 \sin s; -3 \cos s + 4 \sin s; t]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

nebo

$$p(t, u) = [5 \cos u; 5 \sin u; t]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad u \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 11: Válcová plocha pro parametry $t \in \langle 0; 10 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 2

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne rotací přímky k . Přímka k je určena body $[5; 0; 8]$ a $[0; 0; 4]$.

Řešení

Parametrický popis přímky k je:

$$k(t) = [5t; 0; 4 + 4t] \quad t \in \mathbb{R}.$$

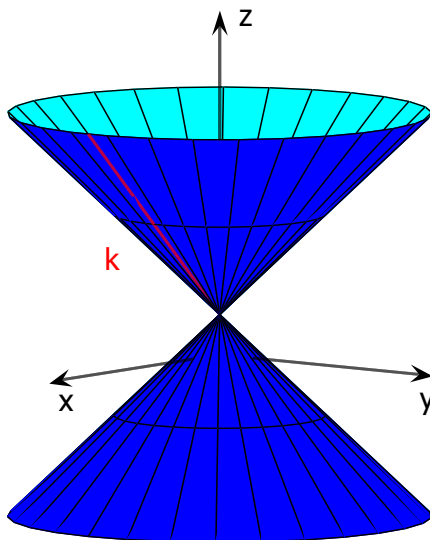
Je to polomeridián rotační kuželové plochy.

Zvolme bod K na přímce k : $K = k(t_0) = [5t_0; 0; 4 + 4t_0]$.

Rovnoběžková kružnice m bodu K v rovině $\alpha : z = 4 + 4t_0$ (poloměr $r = 5t_0$, střed $[0; 0; 4 + 4t_0]$) má parametrický popis: $m(s) = [5t_0 \cos s; 5t_0 \sin s; 4 + 4t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$ (1 oběh).

Parametrické vyjádření rotační kuželové plochy je:

$$p(t, s) = [5t \cos s; 5t \sin s; 4 + 4t]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 12: Kuželová plocha pro parametry $t \in \langle -5; 5 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 3

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne rotací přímky k . Přímka k je určena body $[3\sqrt{2}; 0; -2]$ a $[0; 3\sqrt{2}; 2]$.

Řešení

Parametrický popis přímky k je:

$$k(t) = [3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t; 3\sqrt{2}t; -2 + 4t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tato přímka je s osou rotace mimoběžná.

Zvolíme bod K přímky k : $K = k(t_0) = [3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t_0; 3\sqrt{2}t_0; -2 + 4t_0]$.

Abychom nemuseli počítat poloměr, popíšeme kružnici takto:

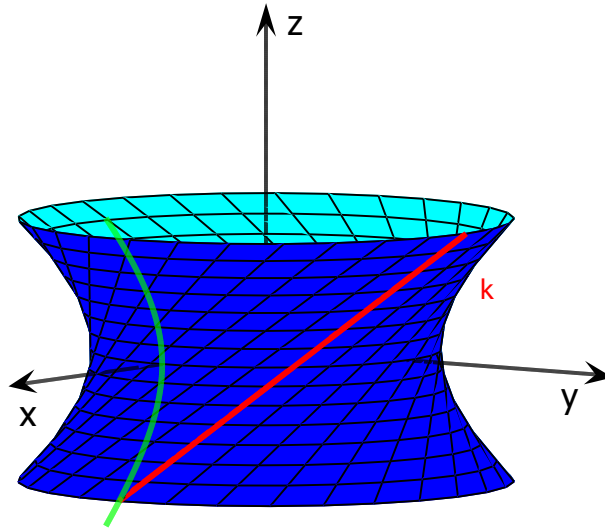
$$m(s) = \begin{bmatrix} (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t_0) \cdot \cos s + 3\sqrt{2}t_0 \sin s; \\ 3\sqrt{2}t_0 \cos s - (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t_0) \cdot \sin s; -2 + 4t_0 \end{bmatrix}$$

$$s \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad (1 \text{ oběh}).$$

Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = \begin{bmatrix} (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t) \cdot \cos s + 3\sqrt{2}t \sin s; \\ 3\sqrt{2}t \cos s - (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t) \cdot \sin s; -2 + 4t \end{bmatrix};$$

$$t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 13: Plocha pro parametry $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$; zeleně je vyznačen polomeridián plochy

Z obrázku vidíme, že plocha je souměrná podle půdorysny (x, y) . Tedy plochu lze vytvořit také rotací přímky l , která je souměrná k přímce k podle půdorysny. Přímka l je určena body $[3\sqrt{2}; 0; 2]$ a $[0; 3\sqrt{2}; -2]$.

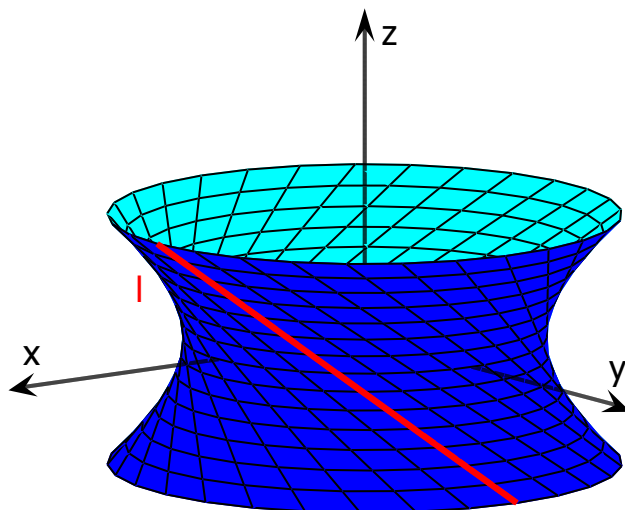
Vyzkoušejte si sami parametrický popis plochy pro zadanou přímku l :

$$p(t, s) = \begin{bmatrix} (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t) \cdot \cos s + 3\sqrt{2}t \sin s; \\ 3\sqrt{2}t \cos s - (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t) \cdot \sin s; 2 - 4t \end{bmatrix};$$

$$t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Na ploše jsou tedy 2 systémy přímek, jeden vznikne rotací přímky k a druhý rotací přímky l . To je velmi výhodné ve stavebnictví.

Podívejme se na křivku plochy v rovině (x, z) , odhadujeme, že meridián plochy je hyperbola. Je tomu skutečně tak a výsledná plocha je rotační jednodílný hyperboloid. Stejnou plochu můžeme tedy vytvořit rotací hyperboly kolem její vedlejší osy.



Obrázek 14: Plocha (vzniklá rotací přímky l) pro parametry $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 4

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne rotací hyperboly k . Hyperbola k leží v rovině (x, z) a má rovnici $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$.

Řešení

Parametrický popis zadané hyperboly je:

$$k(t) = [\pm 3 \cosh t; 0; 2 \sinh t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tato hyperbola je meridián plochy. Pro popis plochy můžeme použít celou hyperbolu (tj. obě větve) a pak stačí otočit o úhel π . Nebo můžeme rotovat jednu větev a otočit ji o úhel 2π . Vybereme bod K na jedné větvi: $K = k(t_0) = [+3 \cosh t_0; 0; 2 \sinh t_0]$.

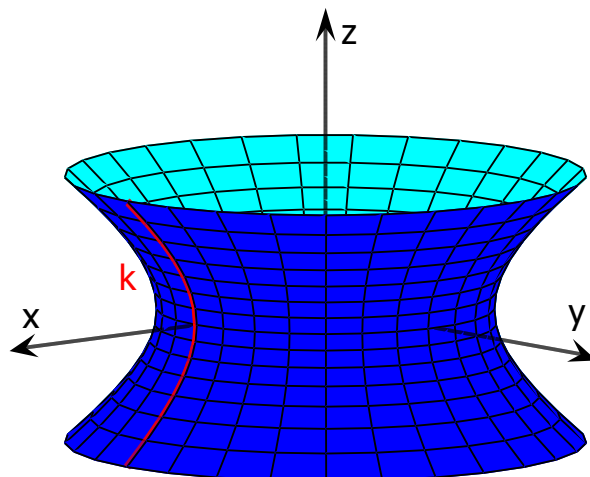
Parametrický popis rovnoběžkové kružnice m bodu K je:

$$m(s) = [3 \cosh t_0 \cdot \cos s; 3 \cosh t_0 \cdot \sin s; 2 \sinh t_0]; \\ s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis jednodílného hyperboloidu je:

$$p(t, s) = [3 \cosh t \cdot \cos s; 3 \cosh t \cdot \sin s; 2 \sinh t]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Hyperbolu můžeme také otáčet kolem její hlavní osy, vzniklá plocha má dva díly a nazývá se dvojdílný rotační hyperboloid.



Obrázek 15: Jednodílný hyperboloid pro parametry $t \in \langle -1; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 5

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací hyperboly k . Rovnoosá hyperbola k leží v rovině (y, z) a má rovnici $-\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1$.

Řešení

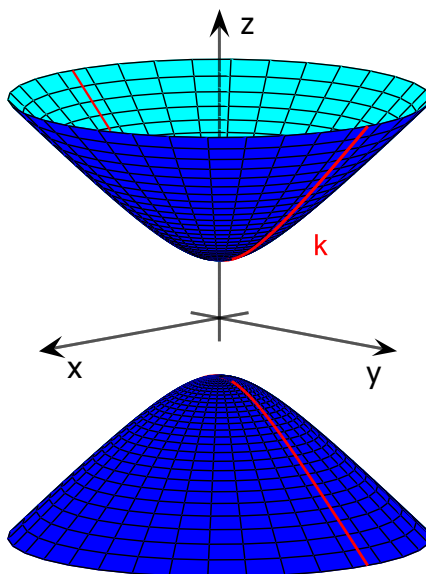
Parametrický popis zadané hyperboly je:

$$k(t) = [0; 5 \sinh t; \pm 5 \cosh t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hyperbolu stačí otočit o úhel π . Zvolme bod $K = k(t_0) = [0; 5 \sinh t_0; 5 \cosh t_0]$ (resp. $[0; 5 \sinh t_0; -5 \cosh t_0]$ na druhé větvi).

Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice m v rovině $\alpha : z = 5 \cosh t_0$ (resp. $z = -5 \cosh t_0$) je: $m(s) = [5 \sinh t_0 \cos s; 5 \sinh t_0 \sin s; \pm 5 \cosh t_0]; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle$. Parametrické vyjádření plochy je:

$$p(t, s) = [5 \sinh t \cos s; 5 \sinh t \sin s; \pm 5 \cosh t]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle.$$



Obrázek 16: Dvojdílný hyperboloid pro parametry $t \in \langle -2; 2 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

V souboru rotačních kvadratických ploch samozřejmě nemůže chybět kulová plocha. Vznikne rotací kružnice, jejíž střed leží na ose rotace.

Příklad č. 6

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací kružnice k . Kružnice k leží v rovině (x, z) , bod $O[0; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 6$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

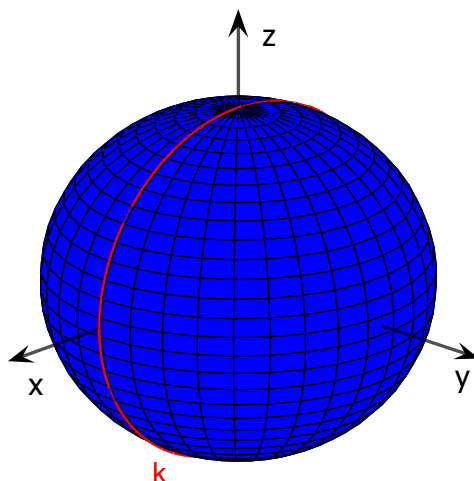
$$k(t) = [6 \cos t; 0; 6 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Můžeme otočit polovinu kružnice ($t \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$) o úhel 2π nebo celou kružnici k o úhel π . Zvolíme bod $K = k(t_0) = [6 \cos t_0; 0; 6 \sin t_0]$. Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice je: $m(s) = [6 \cos t_0 \cos s; 6 \cos t_0 \sin s; 6 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$ (pro $s \in \langle 0; \pi \rangle$ se jedná o půlkružnici).

Parametrický popis kulové plochy je:

$$p(t, s) = [6 \cos t \cos s; 6 \cos t \sin s; 6 \sin t] \\ t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle \quad (\text{nebo } t \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle \text{ a } s \in \langle 0; 2\pi \rangle).$$

Pokud je křivka k elipsa, můžeme ji otáčet buď kolem její hlavní osy nebo kolem její vedlejší osy. Tyto rotační kvadratické plochy se nazývají elipsoidy.



Obrázek 17: Kulová plocha pro parametry $t \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 7

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací elipsy k . Elipsa leží v rovině (x, z) a má rovnici: $\frac{x^2}{4} + \frac{(z-4)^2}{16} = 1$.

Řešení

Parametrický popis elipsy k je:

$$k(t) = [2 \cos t; 0; 4 + 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Osa rotace je hlavní osa elipsy, elipsu otočíme o úhel π . Zvolíme bod $K = k(t_0) = [2 \cos t_0; 0; 4 + 4 \sin t_0]$. Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice: $m(s) = [2 \cos t_0 \cos s; 2 \cos t_0 \sin s; 4 + 4 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = [2 \cos t \cos s; 2 \cos t \sin s; 4 + 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle$$

Z obrázku je zřejmé, proč se tento elipsoid nazývá protáhlý.

Příklad č. 8

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací elipsy k . Elipsa leží v rovině (y, z) a má rovnici: $\frac{y^2}{16} + \frac{(z-2)^2}{4} = 1$.

Řešení

Parametrický popis elipsy k je:

$$k(t) = [0; 4 \cos t; 2 + 2 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

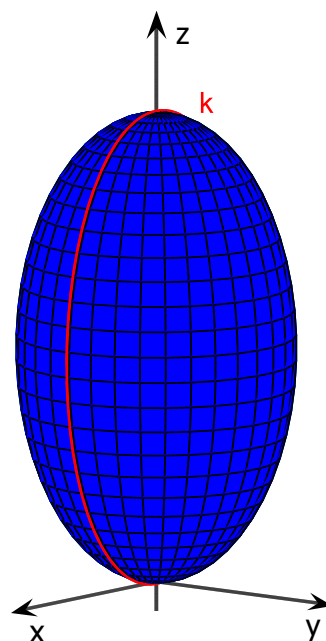
Osa rotace je vedlejší osa elipsy, elipsu otočíme o úhel π .

Zvolíme bod $K = k(t_0) = [0; 4 \cos t_0; 2 + 2 \sin t_0]$.

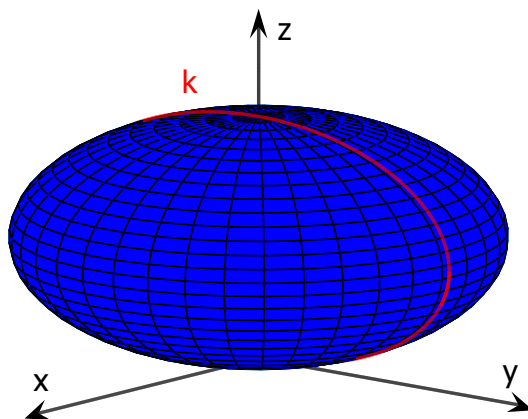
Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice m v rovině $\alpha : z = 2 + 2 \sin t_0$ je:

$$m(s) = [4 \cos t_0 \cos s; 4 \cos t_0 \sin s; 2 + 2 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis plochy je: $p(t, s) = [4 \cos t \cos s; 4 \cos t \sin s; 2 + 2 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle$. Tento elipsoid se nazývá zploštělý.



Obrázek 18: Protáhlý elipsoid pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; \pi \rangle$



Obrázek 19: Zploštělý elipsoid pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; \pi \rangle$

Příklad č. 9

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací paraboly k . Parabola k leží v rovině (x, z) a má rovnici $x^2 = 6z$.

Řešení

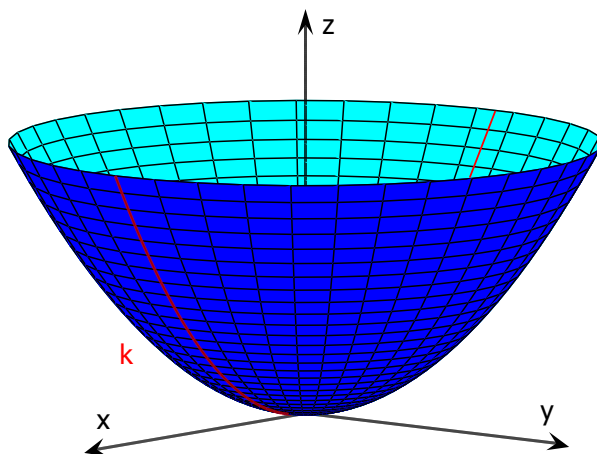
Parametrický popis paraboly k je:

$$k(t) = \left[t; 0; \frac{t^2}{6} \right]; \quad t \in \mathbb{R}$$

Osa rotace je osou paraboly, parabolu otočíme o úhel π . Zvolíme bod $K = k(t_0) = \left[t_0; 0; \frac{t_0^2}{6} \right]$. Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice: $m(s) = \left[t_0 \cos s; t_0 \sin s; \frac{t_0^2}{6} \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = \left[t \cos s; t \sin s; \frac{t^2}{6} \right]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle.$$



Obrázek 20: Paraboloid pro $t \in \langle -5; 5 \rangle$, $s \in \langle 0; \pi \rangle$

Tímto je seznam rotačních kvadratických ploch úplný.

2.2 Další rotační plochy

Nyní můžeme vytvářet sami nejrůznější rotační plochy. Mezi známé rotační plochy patří anuloid.

Příklad č. 10

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací kružnice k . Kružnice k leží v rovině (x, z) , bod $S[6; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 3$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

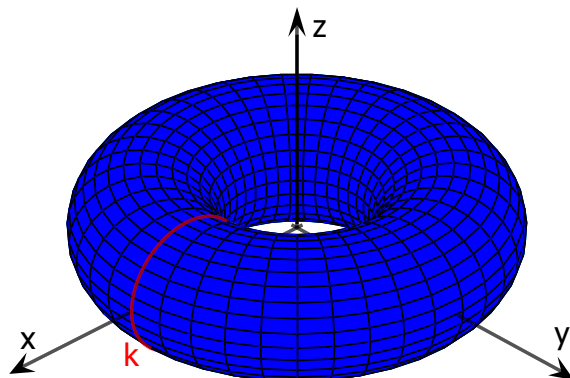
$$k(t) = [6 + 3 \cos t; 0; 3 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Zadaná kružnice neprotíná osu rotace. Zvolíme bod $K = k(t_0) = [6 + 3 \cos t_0; 0; 3 \sin t_0]$. Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice m bodu K v rovině $\alpha : z = 3 \sin t_0$ je:

$$m(s) = [(6 + 3 \cos t_0) \cdot \cos s; (6 + 3 \cos t_0) \cdot \sin s; 3 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = [(6 + 3 \cos t) \cdot \cos s; (6 + 3 \cos t) \cdot \sin s; 3 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 21: Anuloid pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Při pohledu na obrázek se nám určitě vybaví duše automobilového kola.

V příkladě č. 6 jsme rotovali kružnici, jejíž střed ležel na ose rotace, v příkladě č. 9 jsme rotovali kružnici, která nemá společné body s osou rotace. Nyní nás zajímají další případy.

Příklad č. 11

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací kružnice k . Kružnice k leží v rovině (y, z) , bod $S[0; 4; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 4$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

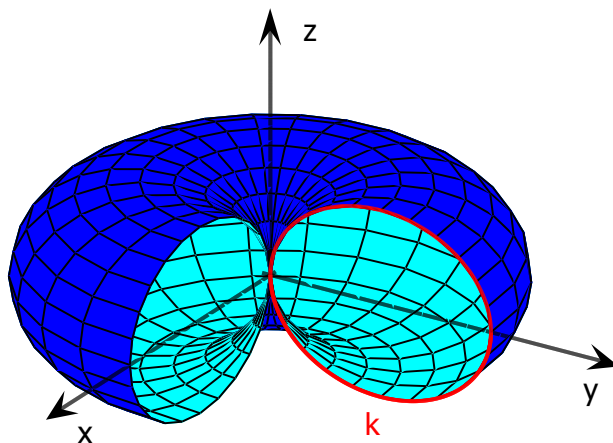
$$k(t) = [0; 4 + 4 \cos t; 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Zadaná kružnice se dotýká osy rotace. Plocha se nazývá axoid. Zvolíme bod $K = k(t_0) = [0; 4 + 4 \cos t_0; 4 \sin t_0]$.

Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice m bodu K v rovině $\alpha : z = 4 \sin t_0$ je:
 $m(s) = [(4 + 4 \cos t_0) \cos s; (4 + 4 \cos t_0) \sin s; 4 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = [(4 + 4 \cos t) \cos s; (4 + 4 \cos t) \sin s; 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 22: Axoid pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle \frac{\pi}{2}; 2\pi \rangle$

Příklad č. 12

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací kružnice k . Kružnice k leží v rovině (x, z) , bod $S[2; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 4$.

Řešení

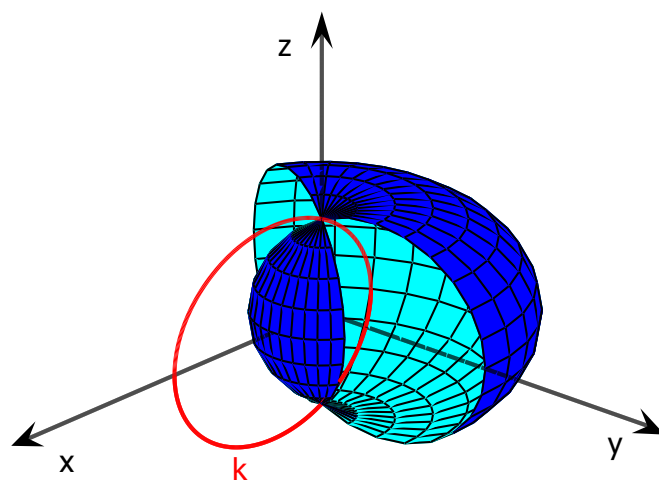
Parametrický popis kružnice k je:

$$k(t) = [2 + 4 \cos t; 0; 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Zadaná kružnice protíná osu rotace ve dvou různých bodech. Plocha se nazývá melanoid. Zvolíme bod $K = k(t_0) = [2 + 4 \cos t_0; 0; 4 \sin t_0]$. Parametrické vyjádření rovnoběžkové kružnice m bodu K v rovině $\alpha : z = 4 \sin t_0$ je: $m(s) = [(2 + 4 \cos t_0) \cos s; (2 + 4 \cos t_0) \sin s; 4 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = [(2 + 4 \cos t) \cos s; (2 + 4 \cos t) \sin s; 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 23: Melanoid pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3} \rangle$

2.3 Příklady na procvičení

1

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací paraboly k . Parabola k leží v rovině (x, z) , bod $V[2; 0; 3]$ je její vrchol, bod $F[3; 0; 3]$ je její ohnisko.

2

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací jedné větve hyperboly k . Hyperbola k leží v rovině (y, z) a má rovnici:

$$\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(z-3)^2}{9} = 1.$$

Vyberte tu větev hyperboly, která protíná osu z .

3

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací křivky k . Parametrický popis křivky k je:

$$k(t) = [t; 0; 3 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

4

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací křivky k . Parametrický popis křivky k je:

$$k(t) = [0; 2 \sin t + 3; t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

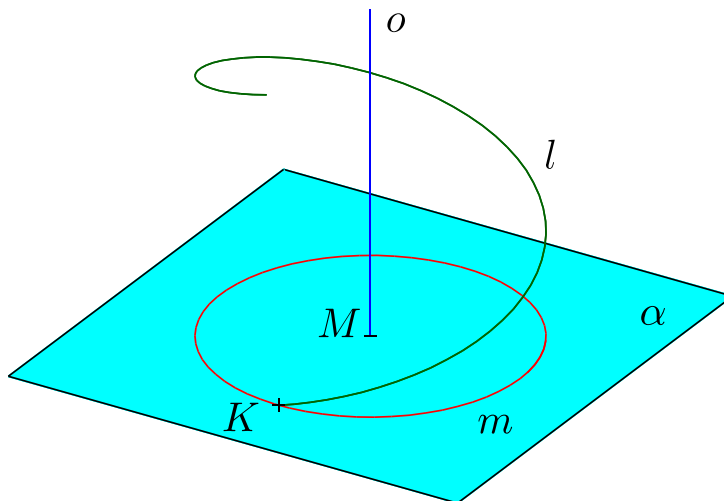
5

Rotační pohyb je zadán osou rotace $o = \text{osa } z$. Napište parametrické vyjádření plochy, která vznikne rotací asteroidy k . Parametrický popis křivky k je:

$$k(t) = [5 \cos^3 t; 0; 5 \sin^3 t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

3 Šroubové plochy

Šroubový pohyb je v prostoru zadán osou o šroubového pohybu, smyslem (pravotočivý či levotočivý), výškou závitu v nebo redukovanou výškou závitu v_0 . Zadaný bod K , který neleží na ose o , se při šroubování pohybuje po šroubovici l . Tato šroubovice leží na rotační válcové ploše, jejíž osou je zadaná osa o . Řídící kružnice m válcové plochy leží v rovině α , která prochází bodem K a je kolmá k ose o . Označme M průsečík osy o a roviny α , je to střed kružnice m , poloměr kružnice je roven vzdálenosti bodů K a M . Více o šroubovici naleznete v práci studenta Jana Suchomela.



Obrázek 24: Ilustrační obrázek

Šroubová plocha vznikne šroubovým pohybem křivky k při zadaném šroubovém pohybu. (Křivka k neleží na jedné rotační válcové ploše s osou rotace o šroubového pohybu.) Každý bod křivky k se pohybuje po šroubovici.

Pro šroubovou plochu je rozhodující 1 závit (odpovídá otočení o úhel 2π a posunutí o výšku v), ten se stále opakuje.

3.1 Přímkové šroubové plochy

Tyto plochy vznikají šroubovým pohybem přímky k , která není rovnoběžná s osou o šroubového pohybu. Pokud přímka k protíná osu o , plochy se nazývají uzavřené a osa o leží na ploše. Pokud přímka k neprotíná osu o , plochy se nazývají otevřené. Je-li přímka k kolmá k ose o , šroubová plocha se nazývá přímá, v opačném případě vývrtková (kosá).

Pro jednoduchost za osu o šroubového pohybu bereme vždy souřadnicovou osu z a popisujeme vždy 1 závit plochy.

V prvním příkladě se ukážeme podrobně postup, v dalších příkladech bude zápis kratší.

Příklad č. 1

Osa o šroubového pohybu je souřadnicová osa z .

Šroubový pohyb je

- a) pravotočivý,
- b) levotočivý.

Výška závitu $v = 16$.

Napište parametrické vyjádření šroubové plochy, která vznikne šroubovým pohybem přímky k . Přímka k je souřadnicová osa x .

Řešení

Parametrický popis přímky k je:

$$k(t) = [t; 0; 0]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přímka k protíná osu o a je k ní kolmá, šroubová plocha je přímá a uzavřená. Na přímce k zvolíme bod:

$$K = k(t_0) = [t_0; 0; 0].$$

Nyní popíšeme šroubovici l bodu K . Při popisu šroubovice začínáme popisem kružnice m v rovině $\alpha : z = 0$. U rotačním ploch jsme mohli tuto kružnici parametrizovat libovolně. Zde ale na parametrickém popisu záleží, její výchozí bod musí být bod K a kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček u pravotočivého šroubového pohybu nebo ve směru hodinových ručiček u levotočivého pohybu (pohled na kružnici m je ze směru kladné poloosy z).

Parametrický popis kružnice m je

$$m(s) = [t_0 \cos s; t_0 \sin s; 0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle \text{ (1 oběh)}$$

pro pohyb proti směru hodinových ručiček, nebo

$$m(s) = [t_0 \cos s; -t_0 \sin s; 0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

pro pohyb ve směru hodinových ručiček.

Nyní potřebujeme znát redukovanou výšku závitu $v_0 = \frac{v}{2\pi} = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$. Do předpisu kružnice m doplníme posunutí v z -ové souřadnici a máme parametrický popis jednoho závitu šroubovice:

- a) pravotočivá: $l(s) = [t_0 \cos s; t_0 \sin s; \frac{8}{\pi} \cdot s]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$
- b) levotočivá: $l(s) = [t_0 \cos s; -t_0 \sin s; \frac{8}{\pi} \cdot s]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

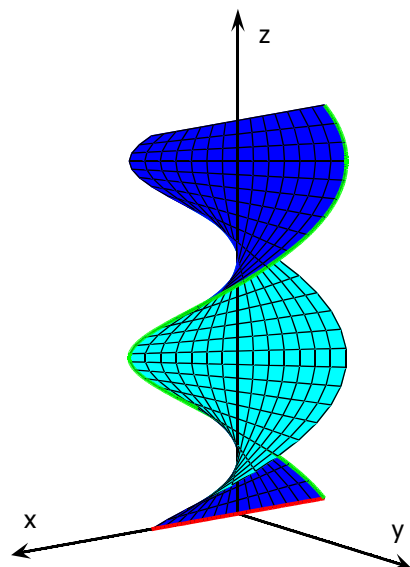
Nyní budeme měnit bod K na přímce k (uvolníme parametr t_0).

$$p(t, s) = \left[t \cos s; t \sin s; \frac{8}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

je popis jednoho závitu pravotočivé šroubové plochy a

$$q(t, s) = \left[t \cos s; -t \sin s; \frac{8}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

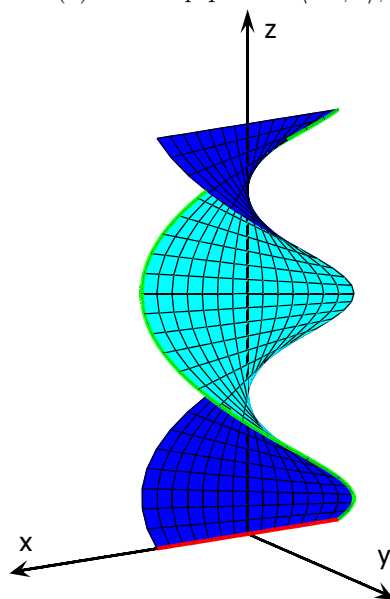
je popis jednoho závitu levotočivé šroubové plochy.



$$k(t) = [t; 0; 0]; \quad t \in \langle -2; 2 \rangle$$

$$l(s) = [-2 \cos s; -2 \sin s; \frac{8}{\pi} \cdot s]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

(a) Plocha p pro $t \in \langle -2; 2 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$



$$k(t) = [t; 0; 0]; \quad t \in \langle -2; 2 \rangle$$

$$l(s) = [-2 \cos s; 2 \sin s; \frac{8}{\pi} \cdot s]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

(b) Plocha q pro $t \in \langle -2; 2 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Obrázek 25: K příkladu č. 1

Příklad č. 2

Osa o šroubového pohybu je souřadnicová osa z . Šroubový pohyb je pravotočivý, redukovaná výška závitu $v_0 = \frac{7}{2}$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem přímky k . Přímka k je určena body $[4; 0; 0]$, $[0; 4; 0]$.

Řešení

Parametrický popis přímky k je:

$$k(t) = [4 - 4t; 4t; 0]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přímka k neprotíná osu o , je k ní kolmá, plocha je přímá a otevřená. Zvolíme bod $K = k(t_0) = [4 - 4t_0; 4t_0; 0]$. Popíšeme kružnici m v rovině $\alpha : z = 0$, výchozí bod je K , kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček:

$$m(s) = [(4 - 4t_0) \cos s - 4t_0 \sin s; 4t_0 \cos s + (4 - 4t_0) \sin s; 0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle \text{ (1 oběh)}.$$

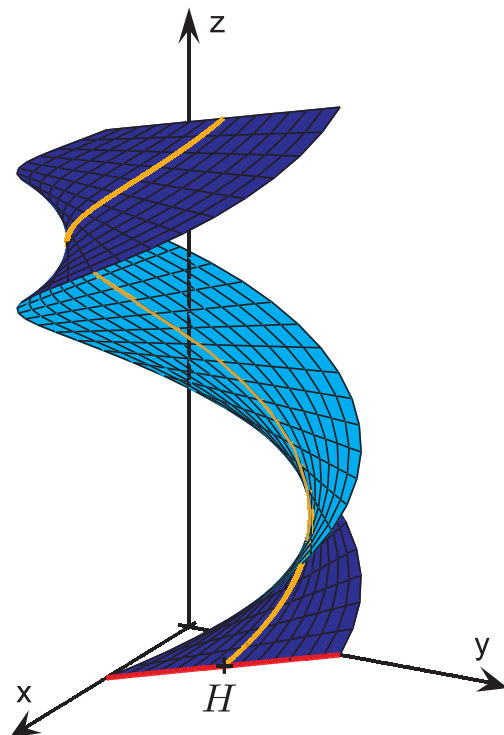
Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

$$l(s) = \left[(4 - 4t_0) \cos s - 4t_0 \sin s; 4t_0 \cos s + (4 - 4t_0) \sin s; \frac{7}{2} \cdot s \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = \left[(4 - 4t) \cos s - 4t \sin s; 4t \cos s + (4 - 4t) \sin s; \frac{7}{2} \cdot s \right]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Na otevřené šroubové ploše je jedna speciální šroubovice, tzv. hrdlová šroubovice. Je to šroubovice bodu H přímky k , který je ose o nejbližší. V našem příkladě je to šroubovice bodu $H[2; 2; 0]$.



Oranžově je vyznačena hrdlová šroubovice

Obrázek 26: Plocha pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 3

Osa o šroubového pohybu je souřadnicová osa z . Šroubový pohyb je levotočivý, výška závitu $v = 12$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem přímky k . Přímka k je určena body $[4; 0; 0]$, $[0; 0; 5]$.

Řešení

Parametrický popis přímky k je:

$$k(t) = [4 - 4t; 0; 5t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přímka k protíná osu o a není kolmá k ose, plocha je uzavřená a vývrtková. Zvolíme bod $K = k(t_0) = [4 - 4t_0; 0; 5t_0]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = 5t_0$, výchozí bod je K , kružnice je probíhána ve směru hodinových ručiček:

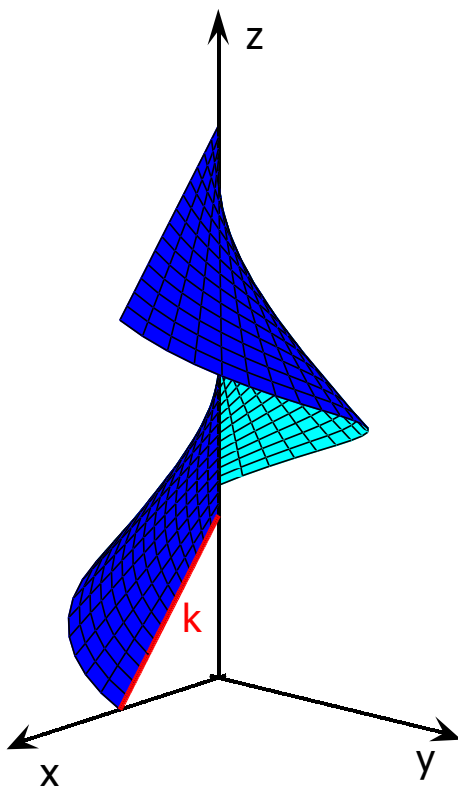
$$m(s) = [(4 - 4t_0) \cos s; -(4 - 4t_0) \sin s; 5t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

$$l(s) = \left[(4 - 4t_0) \cos s; -(4 - 4t_0) \sin s; 5t_0 + \frac{6}{\pi} \cdot s \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = \left[(4 - 4t) \cos s; -(4 - 4t) \sin s; 5t + \frac{6}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 27: Plocha pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 4

Osa o šroubového pohybu je souřadnicová osa z . Šroubový pohyb je pravotočivý, redukovaná výška závitu $v_0 = 3$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem přímky k . Přímka k je určena body $[4; 0; 0]$, $[0; 4; 2]$.

Řešení

Parametrický popis přímky k je:

$$k(t) = [4 - 4t; 4t; 2t]; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přímka k neprotíná osu o a není k ose kolmá, plocha je otevřená a vývrtková. Zvolíme bod $K = k(t_0) = [4 - 4t_0; 4t_0; 2t_0]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = 2t_0$, výchozí bod je K , kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček, je

$$m(s) = [(4 - 4t_0) \cos s - 4t_0 \sin s; 4t_0 \cos s + (4 - 4t_0) \sin s; 2t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

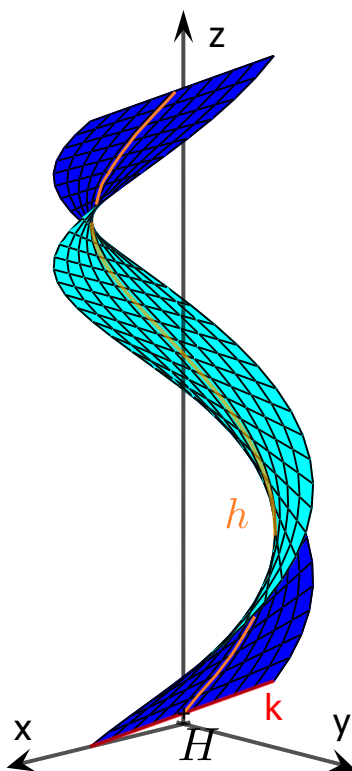
$$l(s) = [(4 - 4t_0) \cos s - 4t_0 \sin s; 4t_0 \cos s + (4 - 4t_0) \sin s; 2t_0 + 3s]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = [(4 - 4t) \cos s - 4t \sin s; 4t \cos s + (4 - 4t) \sin s; 2t + 3s]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Hrdlová šroubovice h této plochy je šroubovice bodu $H [2; 2; 1]$ přímky k .

Kdyby zadaná přímka byla zároveň tečnou šroubovice h v bodě H , jednalo by se o tzv. plochu tečen šroubovice. V tomto příkladě ale tomu tak není.



Obrázek 28: Plocha pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 5

Osa o šroubového pohybu je souřadnicová osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitu $v = 16$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy tečen šroubovice bodu $A[3; 0; 0]$.

Řešení

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu A je

$$l(t) = \left[3 \cos t; 3 \sin t; \frac{8}{\pi} \cdot t \right]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Zvolíme libovolný bod K na šroubovici $K = l(t_0) = [3 \cos t_0; 3 \sin t_0; \frac{8}{\pi} \cdot t_0]$. Popíšeme tečnu šroubovice v tomto bodě.

Tečné vektory šroubovice jsou: $l'(t) = (-3 \sin t; 3 \cos t; \frac{8}{\pi})$,

tečný vektor v bodě K je: $l'(t_0) = (-3 \sin t_0; 3 \cos t_0; \frac{8}{\pi})$.

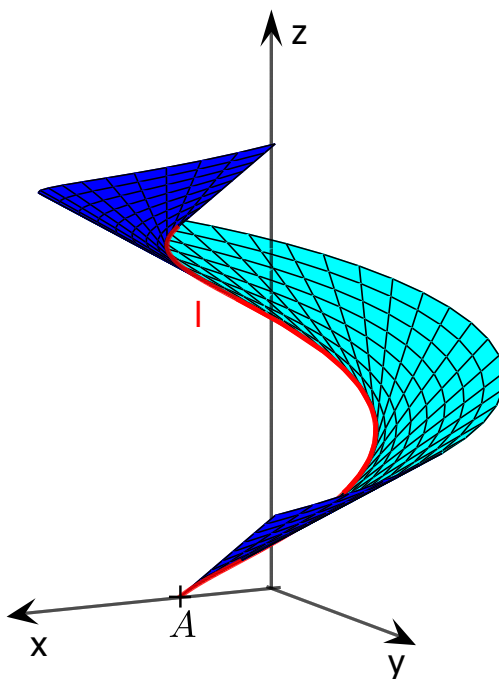
Parametrický popis tečny šroubovice v bodě K je:

$$q(s) = l(t_0) + s \cdot l'(t_0); \quad s \in \mathbb{R}$$

$$q(s) = \left[3 \cos t_0 - 3s \sin t_0; 3 \sin t_0 + 3s \cos t_0; \frac{8}{\pi} \cdot t_0 + \frac{8}{\pi} \cdot s \right]; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Parametrický popis jednoho závitu plochy tečen šroubovice je:

$$p(t, s) = \left[3 \cos t - 3s \sin t; 3 \sin t + 3s \cos t; \frac{8}{\pi} \cdot t + \frac{8}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 29: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2 \rangle$

3.2 Cyklické šroubové plochy

Tyto plochy vznikají šroubovým pohybem kružnice k (kružnice k nesmí ležet v rovině kolmé k ose o a zároveň mít střed na ose o).

Pokud kružnice k protíná osu o , plochy se nazývají uzavřené a osa o leží na ploše. V opačném případě se nazývají otevřené.

Příklad č. 6

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitu $v = 18$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem kružnice k .

Kružnice k leží v rovině (x, z) , bod $S[4; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 2$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

$$k(t) = [4 + 2 \cos t; 0; 2 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Kružnice k neprotíná osu o , plocha je otevřená. Tato plocha se nazývá plocha sv. Jiljí. Část plochy (část, která vznikne šroubovým pohybem horní půlkružnice) byla použita k zaklenutí šroubového schodiště v kostele svatého Jiljí ve Francii.

Zvolíme bod $K = k(t_0) = [4 + 2 \cos t_0; 0; 2 \sin t_0]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = 2 \sin t_0$, výchozí bod K , kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček:

$$m(s) = [(4 + 2 \cos t_0) \cos s; (4 + 2 \cos t_0) \sin s; 2 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

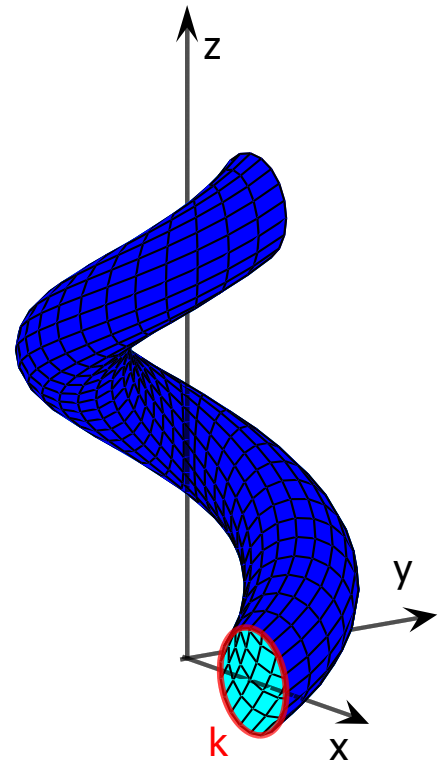
$$l(s) = \left[(4 + 2 \cos t_0) \cos s; (4 + 2 \cos t_0) \sin s; 2 \sin t_0 + \frac{9}{\pi} \cdot s \right]$$

$$s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = \left[(4 + 2 \cos t) \cos s; (4 + 2 \cos t) \sin s; 2 \sin t + \frac{9}{\pi} \cdot s \right]$$

$$t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 30: Plocha sv. Jiljí pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 7

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je levotočivý, výška závitu $v = 20$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem kružnice k . Kružnice k leží v rovině (x, z) , bod $S[2; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 2$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

$$k(t) = [2 + 2 \cos t; 0; 2 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Kružnice k se dotýká osy o , plocha je uzavřená a osa o na ploše leží.

Zvolíme bod $K = k(t_0) = [2 + 2 \cos t_0; 0; 2 \sin t_0]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = 2 \sin t_0$, výchozí bod K , kružnice je probíhána ve směru hodinových ručiček:

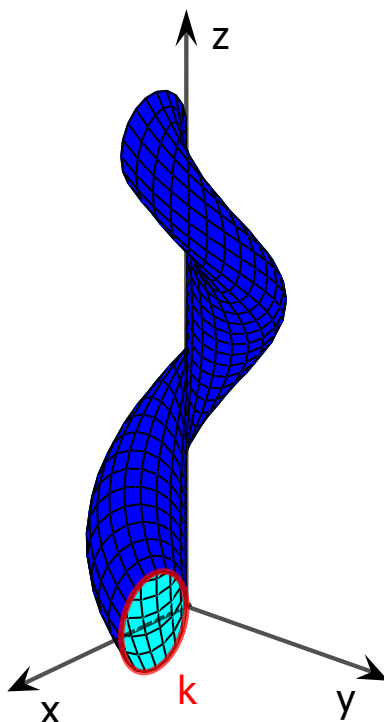
$$m(s) = [(2 + 2 \cos t_0) \cos s; -(2 + 2 \cos t_0) \sin s; 2 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

$$l(s) = \left[(2 + 2 \cos t_0) \cos s; -(2 + 2 \cos t_0) \sin s; 2 \sin t_0 + \frac{10}{\pi} \cdot s \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = \left[(2 + 2 \cos t) \cos s; -(2 + 2 \cos t) \sin s; 2 \sin t + \frac{10}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 31: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 8

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitu $v = 20$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem kružnice k . Kružnice k leží v rovině (x, z) , bod $S[2; 0; 4]$ je střed, poloměr je $r = 4$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

$$k(t) = [2 + 4 \cos t; 0; 4 + 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Kružnice k protíná osu o , plocha je uzavřená.

Zvolíme bod $K = k(t_0) = [2 + 4 \cos t_0; 0; 4 + 4 \sin t_0]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = 4 + 4 \sin t_0$, výchozí bod K , kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček:

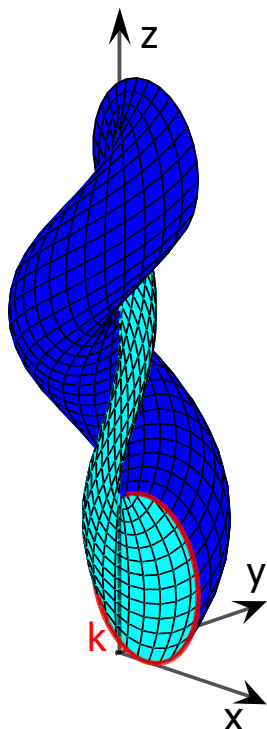
$$m(s) = [(2 + 4 \cos t_0) \cos s; (2 + 4 \cos t_0) \sin s; 4 + 4 \sin t_0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

$$l(s) = \left[(2 + 4 \cos t_0) \cos s; (2 + 4 \cos t_0) \sin s; 4 + 4 \sin t_0 + \frac{10}{\pi} \cdot s \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = \left[(2 + 4 \cos t) \cos s; (2 + 4 \cos t) \sin s; 4 + 4 \sin t + \frac{10}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 32: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Příklad č. 9

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitu $v = 20$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem kružnice k . Kružnice k leží v rovině (x, y) , bod $S[6; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 3$.

Řešení

Parametrický popis kružnice k je:

$$k(t) = [6 + 3 \cos t; 3 \sin t; 0]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Kružnice k nemá společný bod s osou o , plocha je otevřená. Tato plocha se nazývá plocha vinutého sloupku.

Zvolíme bod $K = k(t_0) = [6 + 3 \cos t_0; 3 \sin t_0; 0]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = 0$, výchozí bod K , kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček:

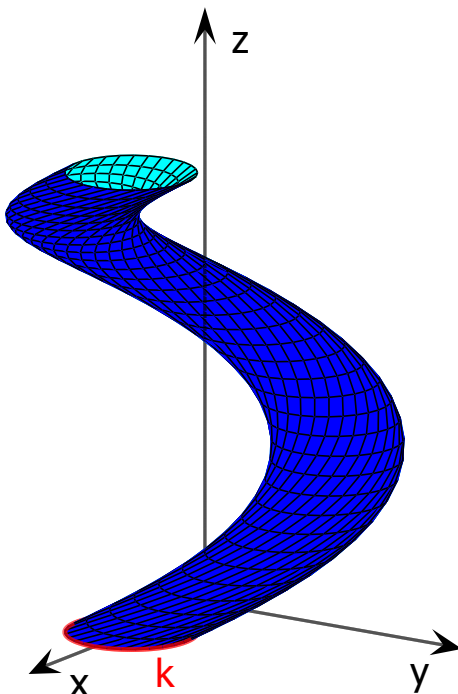
$$m(s) = [(6 + 3 \cos t_0) \cos s - 3 \sin t_0 \sin s; 3 \sin t_0 \cos s + (6 + 3 \cos t_0) \sin s; 0]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Parametrický popis jednoho závitu šroubovice bodu K je:

$$l(s) = \left[(6 + 3 \cos t_0) \cos s - 3 \sin t_0 \sin s; 3 \sin t_0 \cos s + (6 + 3 \cos t_0) \sin s; \frac{10}{\pi} \cdot s \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je:

$$p(t, s) = \left[(6 + 3 \cos t) \cos s - 3 \sin t \sin s; 3 \sin t \cos s + (6 + 3 \cos t) \sin s; \frac{10}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 33: Vinutý sloupek pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

3.3 Další šroubové plochy

Nyní můžeme vytvářet sami nejružnější šroubové plochy. Můžeme například šroubovat část paraboly.

Příklad č. 10

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitů $v = 16$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitů plochy, která vznikne šroubovým pohybem paraboly k .

Parabola k leží v rovině (x, z) a má rovnici $(x - 4)^2 = 2z$. Uvažujte část paraboly, pro x -ové souřadnice bodů této části platí $0 \leq x \leq 8$.

Řešení

Parametrický popis části paraboly je:

$$k(t) = \left[t + 4; 0; \frac{t^2}{2} \right]; \quad t \in \langle -4; 4 \rangle.$$

Zvolíme bod $K = k(t_0) = \left[t_0 + 4; 0; \frac{t_0^2}{2} \right]$. Parametrický popis kružnice m v rovině $\alpha : z = \frac{t_0^2}{2}$, výchozí bod K , kružnice je probíhána proti směru hodinových ručiček:

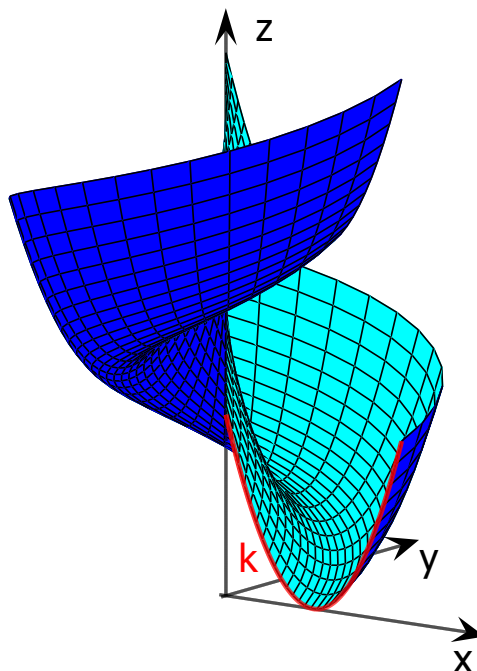
$$m(s) = \left[(t_0 + 4) \cos s; (t_0 + 4) \sin s; \frac{t_0^2}{2} \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Parametrický popis jednoho závitů šroubovice bodu K je:

$$l(s) = \left[(t_0 + 4) \cos s; (t_0 + 4) \sin s; \frac{t_0^2}{2} + \frac{8}{\pi} \cdot s \right]; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Parametrické vyjádření jednoho závitů plochy je:

$$p(t, s) = \left[(t + 4) \cos s; (t + 4) \sin s; \frac{t^2}{2} + \frac{8}{\pi} \cdot s \right]; \quad t \in \langle -4; 4 \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 34: Plocha pro $t \in \langle -4; 4 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

3.4 Příklady na procvičení

1

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je levotočivý, redukovaná výška závitu $v_0 = 3$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem elipsy k . Elipsa k leží v rovině (y, z) a má rovnici $\frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$.

2

Je dána kružnice k v rovině (x, z) , bod $S[0; 0; 4]$ je její střed, poloměr je $r = 4$. Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitu $v = 4 \cdot r = 16$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu tzv. plochy kadeře, která vznikne šroubovým pohybem zadané kružnice k .

3

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je levotočivý, výška závitu $v = 18$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem části paraboly k . Parabola k v rovině (y, z) má rovnici $(z-4)^2 = 4y$. Uvažujte část paraboly, pro z -ové souřadnice bodů této části platí $0 \leq z \leq 8$.

4

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, redukovaná výška závitu $v_0 = 2$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem kružnice k .

Kružnice k leží v rovině (x, y) , bod $S[2; 0; 0]$ je její střed, poloměr je $r = 4$.

5

Osa o šroubového pohybu je osa z , šroubový pohyb je pravotočivý, výška závitu $v = 12$. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu plochy, která vznikne šroubovým pohybem asteroidy k .

Parametrický popis křivky k je: $k(t) = [5 \cos^3 t; 5 \sin^3 t; 0]$; $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$

4 Tečné roviny ploch

Je dána plocha p a na ní bod T . Tečná rovina plochy obsahuje tečny všech křivek plochy, které procházejí bodem T .

Abychom získali tečnou rovinu plochy v bodě T , vybereme na ploše dvě různé křivky k a l , které procházejí bodem T . Pokud tečny křivek k a l v bodě T jsou různé, určují tyto tečny tečnou rovinu τ plochy v bodě T .

Postup se ukážeme na konkrétním příkladě.

Příklad č. 1

Je dána kulová plocha p o středu $O[0; 0; 0]$ a poloměru $r = 4$. Napište parametrické vyjádření plochy. Dále napište obecnou rovnici tečné roviny plochy v jejím bodě $T[4; 0; 0]$.

Řešení

Kulovou plochu získáme rotací kružnice $k(t) = [4 \cos t; 0; 4 \sin t]$; $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ kolem osy z . Parametrický popis plochy je:

$$p(t, s) = [4 \cos t \cos s; 4 \cos t \sin s; 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle.$$

Zjistíme pro jaké hodnoty parametrů t a s budeme v bodě $T[4; 0; 0]$ ($T = p(?, ?)$). Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 4 \cos t \cos s &= 4 \\ 4 \cos t \sin s &= 0 \\ 4 \sin t &= 0 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice je $t \in \{0; \pi; 2\pi\}$. Po dosazení $t \in \{0; \pi; 2\pi\}$ do druhé rovnice máme $\sin s = 0$ a tedy $s \in \{0; \pi\}$. Vezmeme-li v úvahu i první rovnici, vyhovují tyto kombinace:

$$T = p(0, 0) = p(\pi, \pi) = (2\pi, 0).$$

Vyberme si $T = p(2\pi, 0) = [4; 0; 0]$. Nyní potřebujeme získat 2 křivky procházející bodem T . Ty získáme z parametrického vyjádření plochy tak, že jeden parametr necháme proměnný a druhý budeme fixovat (buď $t = 2\pi$ nebo $s = 0$).

Máme:

$$k(t) = p(t, 0) = [4 \cos t \cos 0; 4 \cos t \sin 0; 4 \sin t] = [4 \cos t; 0; 4 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle,$$

$$l(s) = p(2\pi, s) = [4 \cos(2\pi) \cos s; 4 \cos(2\pi) \sin s; 4 \sin(2\pi)] = [4 \cos s; 4 \sin s; 0]; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle.$$

Křivka k je kružnice, křivka l půlkružnice, vypočítáme tečné vektory:

$$\begin{aligned} k'(t) &= (-4 \sin t; 0; 4 \cos t) \\ l'(s) &= (-4 \sin s; 4 \cos s; 0). \end{aligned}$$

Tečné vektory v bodě T dostaneme dosazením hodnot parametrů:

$$k'(2\pi) = (0; 0; 4) \text{ a } l'(0) = (0; 4; 0).$$

Pro obecnou rovnici roviny potřebujeme znát normálový vektor. Ten získáme vektorovým součinem tečných vektorů v bodě T :

$$(0; 0; 4) \times (0; 4; 0) = (-16; 0; 0) \sim (1; 0; 0).$$

Obecná rovnice tečné roviny τ je:

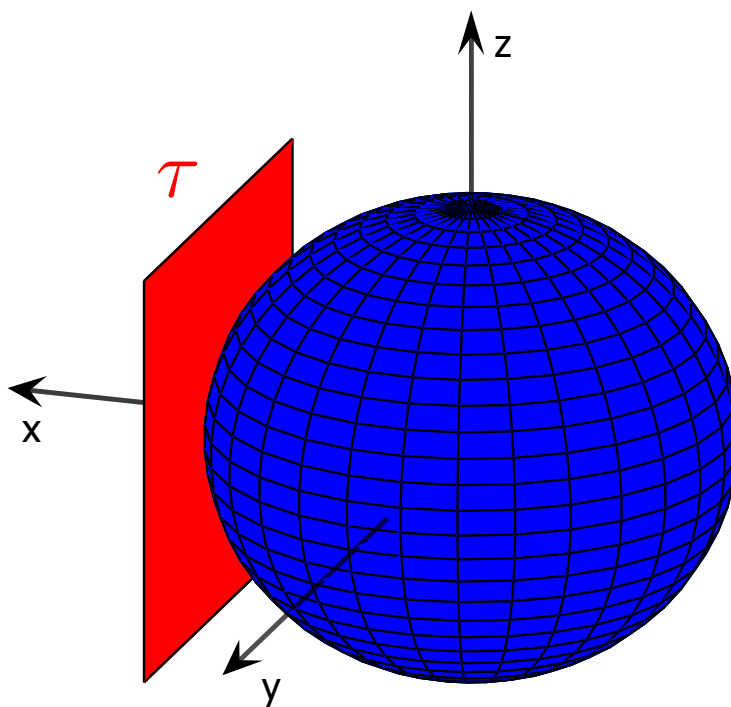
$$1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d = 0.$$

Dosadíme souřadnice bodu $T[4; 0; 0]$: $4 + d = 0$ a máme $d = -4$.

Hledaná rovnice tečné roviny τ je:

$$x - 4 = 0.$$

Pokud použijeme zbývající dvě kombinace ($T = p(\pi, \pi)$ a $T = p(0; 0)$) dostaneme stejnou rovinu.



Obrázek 35: Kulová plocha s tečnou rovinou τ

Tečná rovina kulové plochy má s plochou společný jeden jediný bod (bod dotyku). U obecnějších ploch tomu tak nemusí být, tečná rovina může plochu „říznout“ v křivce.

Příklad č. 2

Je dána rotační plocha (anuloid) $p(t, s) = [(6 + 3 \cos t) \cos s; (6 + 3 \cos t) \sin s; 3 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Napište obecnou rovnici tečné roviny plochy v bodě $T = p(\pi, 0)$.

Řešení

Bod T má souřadnice $T = p(\pi, 0) = [(6 + 3 \cdot (-1)) \cdot 1; (6 - 3) \cdot 0; 0] = [3; 0; 0]$.

Křivky plochy procházející bodem T jsou:

$$k(t) = p(t, 0) = [6 + 3 \cos t; 0; 3 \sin t] \text{ a}$$

$$l(s) = p(\pi, s) = [3 \cos s; 3 \sin s; 0],$$

obě křivky jsou kružnice. Tečné vektory křivek získáme derivováním:

$$\begin{aligned}k'(t) &= (-3 \sin t; 0; 3 \cos t), \\l'(s) &= (-3 \sin s; 3 \cos s; 0).\end{aligned}$$

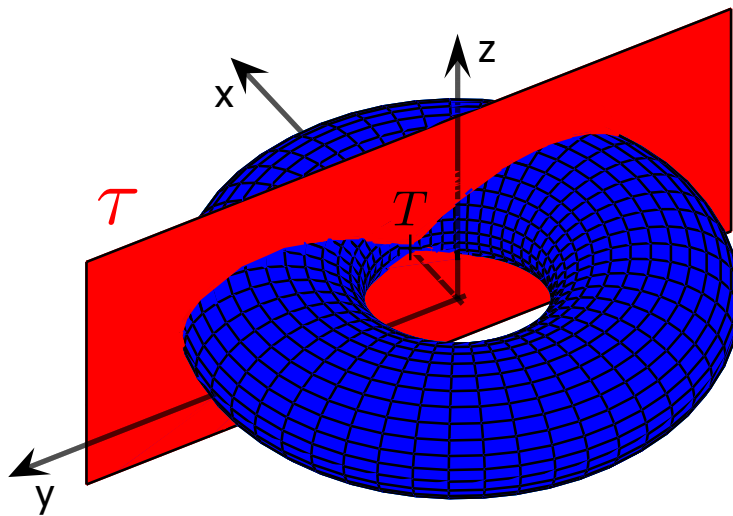
Tečné vektory křivek v bodě T jsou:

$$\begin{aligned}k'(\pi) &= (0; 0; -3) \sim (0; 0; 1), \\l'(0) &= (0; 3; 0) \sim (0; 1; 0).\end{aligned}$$

Vektorový součin je: $(0; 0; 1) \times (0; 1; 0) = (-1; 0; 0) \sim (1; 0; 0)$.

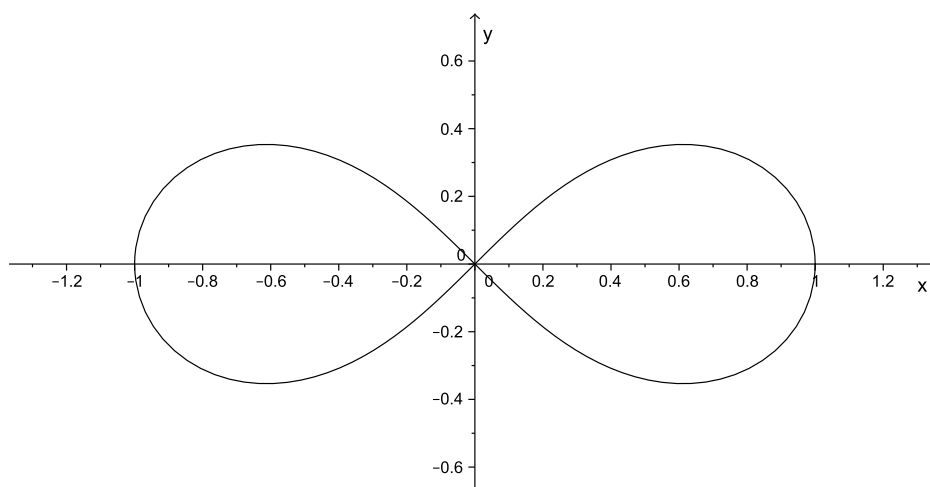
Obecná rovnice tečné roviny τ je: $x + d = 0$. Po dosazení souřadnic bodu T dostaneme hodnotu $d = -3$ a rovnice tečné roviny τ je:

$$\tau : x - 3 = 0.$$



Obrázek 36: Anuloid s tečnou rovinou τ

Tečná rovina τ řeže anuloid v křivce, která se nazývá Bernoulliho lemniskáta.



Obrázek 37: Bernoulliho lemniskáta

Příklad č. 3

Je dána část přímkové šroubové plochy $p(t, s) = [(4 - 4t) \cos s; (4 - 4t) \sin s; 5t + 3s]; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle; \quad s \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

Napište obecnou rovnici tečné roviny plochy v bodě $T = p(0, 0)$.

Řešení

Bod T má souřadnice $T = p(0, 0) = [4; 0; 0]$.

Křivky plochy procházející bodem T jsou:

$$k(t) = p(t, 0) = [4 - 4t; 0; 5t] \text{ a}$$

$$l(s) = p(0, s) = [4 \cos s; 4 \sin s; 3s],$$

křivka k je přímka, křivka l je šroubovice. Tečné vektory křivek získáme derivováním:

$$k'(t) = (-4; 0; 5),$$

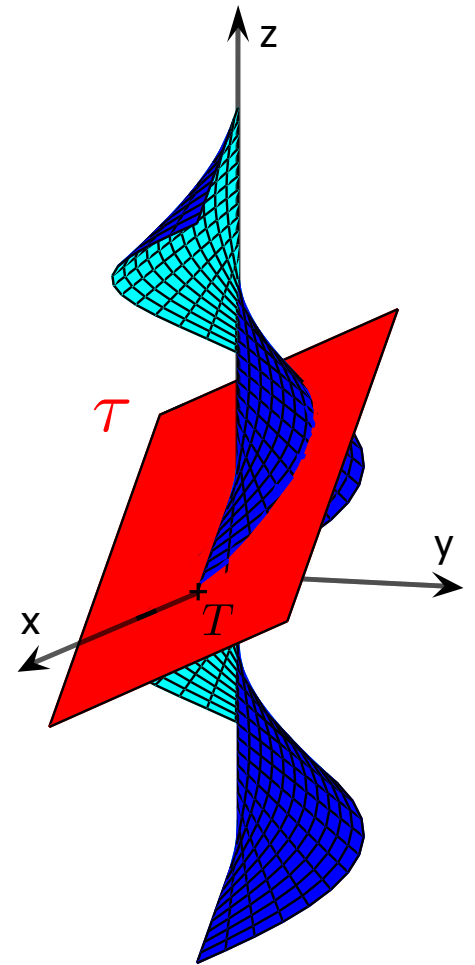
$$l'(s) = (-4 \sin s; 4 \cos s; 3).$$

Tečné vektory křivek v bodě T jsou: $k'(0) = (-4; 0; 5)$ a $l'(0) = (0; 4; 3)$. Vektorový součin je: $(-4; 0; 5) \times (0; 4; 3) = (-20; 12; -16) \sim (5; -3; 4)$.

Obecná rovnice tečné roviny τ je: $5x - 3y + 4z + d = 0$. Po dosazení souřadnic bodu T máme:

$$\tau : 5x - 3y + 4z - 20 = 0.$$

I v tomto příkladě tečná rovina proniká plochou, má s ní společnou přímku a ještě rovinovou křivku.



Obrázek 38: Přímková vývrtková plocha s tečnou rovinou τ

U některých ploch existují body, ve kterých tečná rovina neexistuje, tyto body nazýváme singulárními body. Například vrchol kuželové plochy je singulární bod plochy.

Příklad č. 4

Je dána plocha $p(t, s) = [t \cdot \sin s; t \cdot \cos s; 4 \cos t \cos s]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Napište obecnou rovnici tečné roviny plochy v bodě $T = p(0, 0)$.

Řešení

Bod T má souřadnice $T = p(0, 0) = [0; 0; 4]$.

Křivky plochy procházející bodem T jsou:

$$k(t) = p(t, 0) = [0; t; 4 \cos t] \text{ a}$$

$$l(s) = p(0, s) = [0; 0; 4 \cos s].$$

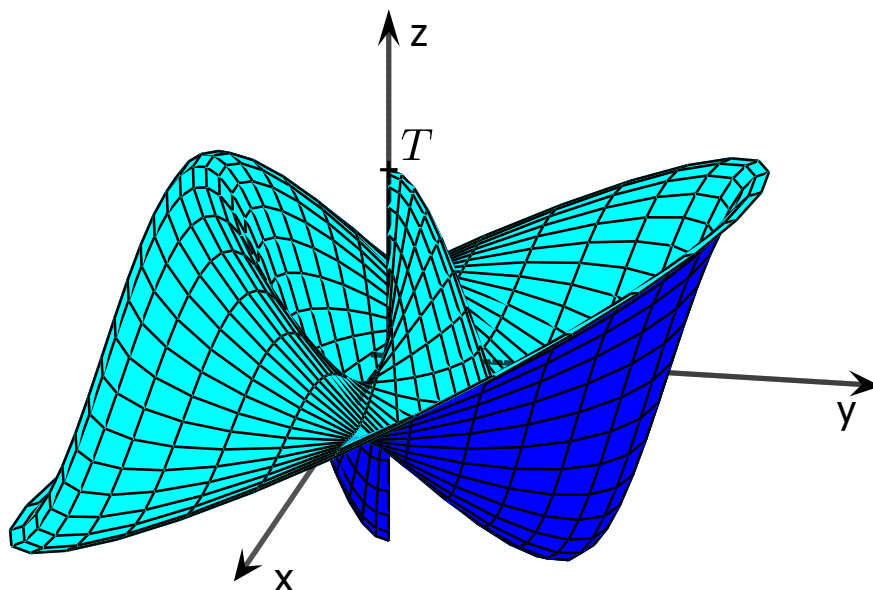
Tečné vektory křivek získáme derivováním:

$$k'(t) = (0; 1; -4 \sin t),$$

$$l'(s) = (0; 0; -4 \sin s).$$

Tečné vektory křivek v bodě T jsou: $k'(0) = (0; 1; 0)$ a $l'(0) = (0; 0; 0)$ (bod T je singulárním bodem křivky l). Vektorový součin je: $(0; 1; 0) \times (0; 0; 0) = (0; 0; 0)$

Tečná rovina v bodě T neexistuje, je to singulární bod.



Obrázek 39: Na ploše je vyznačena plocha se singulárním bodem T

Viděli jsme v příkladě 2 a 3, že můžeme vytvářet rovinné křivky jako průnik plochy a roviny. Tato rovina nemusí být nutně tečná rovina. Budeme-li například řezat anuloid v příkladě 2 rovinami rovnoběžnými s tečnou rovinou τ , získáme tzv. Cassiniho křivky.

Z ploch můžeme získávat i nové prostorové křivky a to jako průnik dvou ploch. V posledním příkladě si ukážeme průnik kulové plochy a válcové plochy, výsledná křivka se nazývá Vivianiho okénko.

Příklad č. 5

Je dána kulová plocha o středu $O[0; 0; 0]$ a poloměru $r = 2$. Dále je dána rotační válcová plocha, jejíž řídící kružnice m leží v rovině (x, y) , její střed je bod $S[0; 1; 0]$ a poloměr je 1.

Řešení

Parametrický popis kulové plochy je:

$$p(t, s) = [2 \cos t \sin s; 2 \cos t \cos s; 2 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle.$$

Parametrický popis rotační válcové plochy začneme popisem kružnice m :

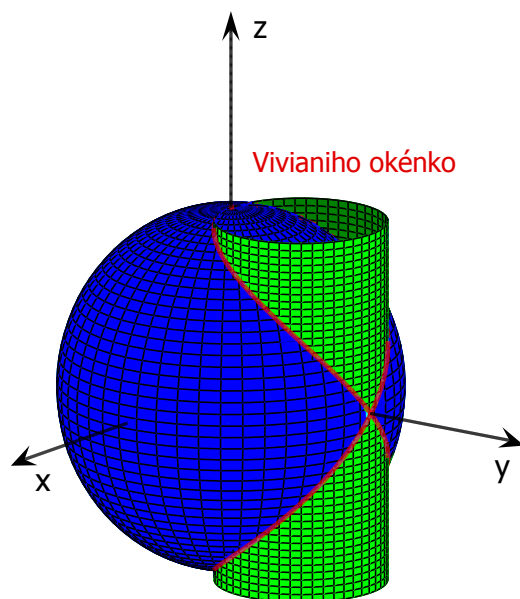
$m(t) = [\cos t; 1 + \sin t; 0]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Vybereme bod $K = k(t_0) = [\cos t_0; 1 + \sin t_0; 0]$. Parametrický popis povrchové přímky (rovnoběžné s osou z) procházející bodem K je:

$$l(s) = [\cos t_0; 1 + \sin t_0; s]; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Popis válcové plochy je:

$$q(t, s) = [\cos t; 1 + \sin t; s]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \mathbb{R}.$$

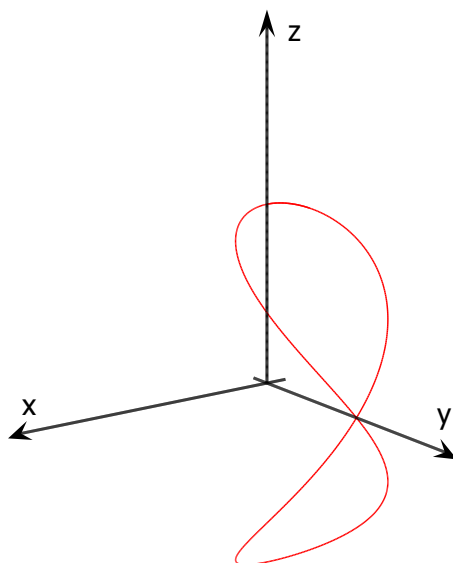
Na obrázku vidíme průnikovou křivku zadaných ploch, tzv. Vivianiho okénko. Křivka je nazvána po italském matematikovi Vincenzu Vivianim.



$$p \quad (t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad s \in \langle 0; \pi \rangle)$$

$$q \quad (t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad s \in \langle -2; 2 \rangle)$$

(a) Průnikem rotační válcové a kulové plochy je křivka Vivianiho okénko



(b) Křivka Vivianiho okénko

Obrázek 40: K příkladu č. 5

5 Praktické využití

Pokud se kolem sebe rozhlédnete, určitě nějakou plochu objevíte. Povrch obyčejné tužky bývá část válcové plochy, na trychtýři je část kuželové plochy, na vývrtce můžete najít části šroubových ploch (obr. 50a). Šroubové plochy jsou na všech možných šroubech a závitech (obr. 50c). Některé těstoviny jsou tvaru části šroubové plochy (před uvařením) (obr. 50b).

Pokud vám někdy spadla počítačová myš a rozbila se, určitě vás zaujala kulička uvnitř, která svým pohybem udává pohyb kurzoru na obrazovce (obr. 41a). Kulové plochy jsou také povrchem kuliček v ložisku (obr. 41b). Některé lustry jsou tvořeny částmi kulových ploch.

Pokud jste někdy píchli kolo, museli jste buď slepovat nebo vyměnit duši kola (obr. 42c), ta má tvar anuloidu. Anuloid je také součástí Teslova transformátoru pro získávání vysokých napětí (obr. 42b).

Povrch parabolických zrcadel je část rotačního paraboloidu (obr. 45b), podobně je tomu u parabolických antén. Zajímavé je akustické zrcadlo pocházející z 1. světové války, jehož povrch je také část paraboloidu (obr. 45a).

Rotační a šroubové plochy jsou často využívány ve stavebnictví a architektuře. Třeba takový okap je složen z částí válcových ploch (obr. 46a). Také jednoduché klenby jsou části válcových ploch (obr. 46b). Jiné využití válcových ploch vidíme na Centre Pompidou (Paříž, Francie) (obr. 46c). Opera v Sydney (Austrálie), navržená v roce 1956 dánským architektem Jørnem Utzonem, je zastřešena skořepinami kulových ploch (obr. 41c). Kupole budovy německého parlamentu (Berlín, Německo) je část protáhlého elipsoidu (obr. 43a). Chladicí věže jaderných elektráren mají tvar jednodílného rotačního hyperboloidu (obr. 44b). Tvar jednodílného hyperboloidu má i rozhledna Borůvka u obce Hluboká (Pardubický kraj, Česká republika) (obr. 44a). Muzeum současného umění v Nitéro - autor architekt Oskar Niemeyer využil rotační kuželovou plochu (obr. 47). Muzeum je v Brazílii nedaleko Rio de Janeira.

Obecnější rotační plochy jsou často využívány jako střechy. Na obrázku vidíme zastřešení kostela Nejsvětějšího srdce Ježíšova, Sacré-Coeur (Paříž, Francie) (obr. 48).

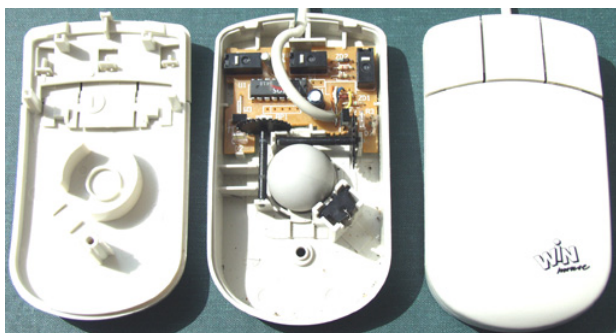
Části šroubových ploch můžeme vidět u točivých schodišť. Delší hrany schodů leží na přímkách přímých šroubových ploch (obr. 49).

Na schodišti v muzeu Louvre (Paříž, Francie) je vidět část vývrtkové šroubové plochy (obr. 50d).

Na kostele Panny Marie Sedmibolestné v Bratislavě (Slovenská republika) je střecha tvořena více než polovinou závitů plochy tečen šroubovice (obr. 52).

Nejrůznější ozdobné tordované sloupky z období baroka jsou cyklické šroubové plochy. U vchodu do chrámu Panny Marie Sněžné v Olomouci (Česká republika) vidíme levotočivý i pravotočivý šroubový sloup (obr. 51).

Kulová plocha



(a) Kuličková myš



(b) Kuličková ložiska



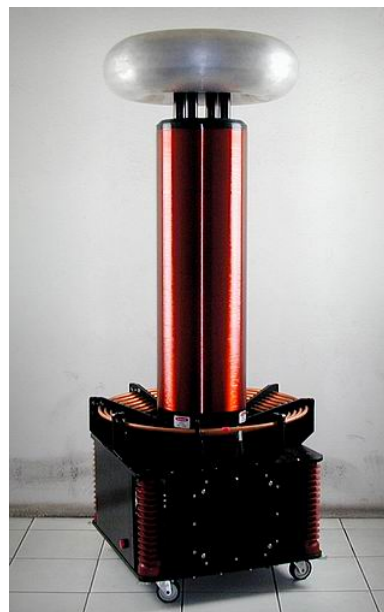
(c) Opera v Sydney

Obrázek 41

Anuloid



(a) Cívka z Teslova transformátoru



(b) Teslův transformátor



(c) Duše kola

Obrázek 42

Protáhlý elipsoid



(a) Kupole německého parlamentu



(b) Německý parlament

Obrázek 43

Jednodílný hyperboloid



(a) Rozhledna Borůvka



(b) Chladicí věže jaderných elektráren

Obrázek 44

Paraboloid



(a) Akustická zrcadla



(b) Parabolická zrcadla

Obrázek 45

Válcová plocha



(a) Okapy



(b) Klenby



(c) Centre Pompidou (Paříž, Francie)

Obrázek 46

Kuželová plocha



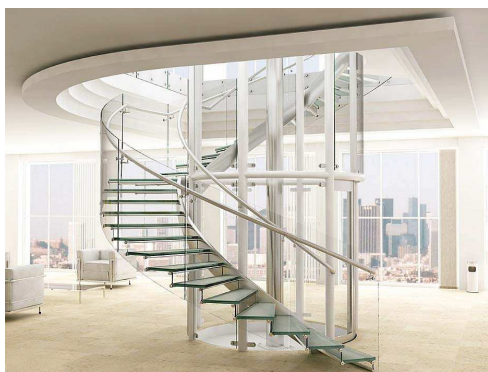
Obrázek 47: Muzeum současného umění v Nitéroí

Zastřešení budov rotačními plochami



Obrázek 48: Sacré-Coeur (Kostel Nejsvětějšího srdce Ježíšova) - Paříž, Francie

Přímá přímková šroubová plocha



Obrázek 49: Točité schodiště

Vývrtková přímková šroubová plocha



(a) Vývrtka



(b) Těstoviny



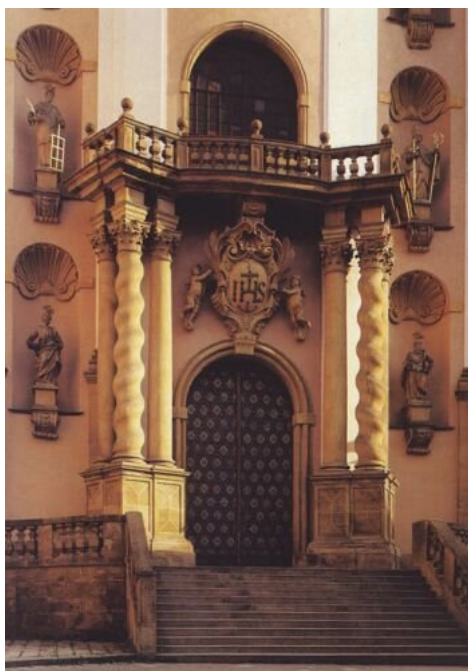
(c) Závity



(d) Muzeum Louvre v Paříži, Francie

Obrázek 50

Vinutý sloupec



Obrázek 51: Chrám Panny Marie Sněžné v Olomouci

Plocha tečen šroubovice



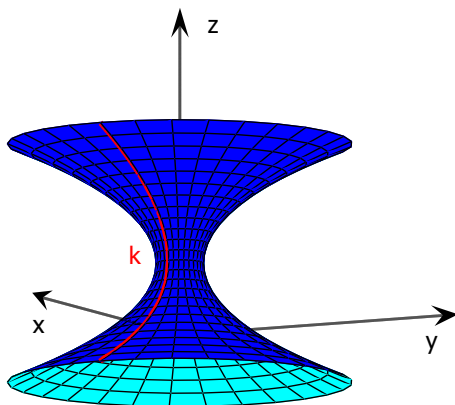
Obrázek 52: Kostel Panny Marie Sedmiboletné

6 Výsledky

Rotační plochy

1

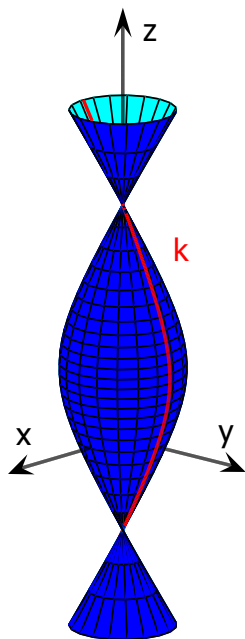
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = \left[\left(\frac{t^2}{4} + 2 \right) \cdot \cos s; \left(\frac{t^2}{4} + 2 \right) \cdot \sin s; t + 3 \right]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 53: Plocha pro $t \in \langle -5; 5 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

2

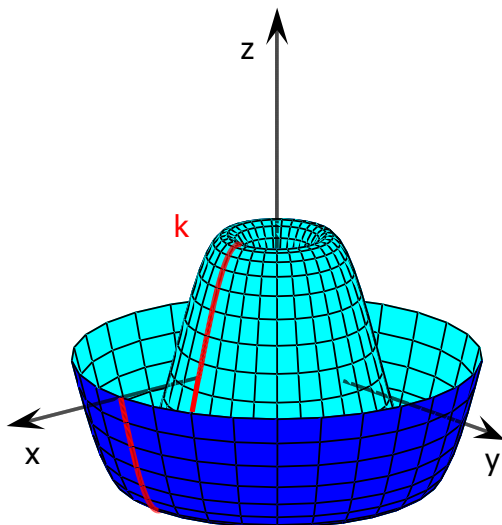
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [(5 - 2 \cosh t) \cdot \cos s; (5 - 2 \cosh t) \cdot \sin s; 3 + 3 \sinh t]; \quad t \in \mathbb{R}; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 54: Plocha pro $t \in \langle -2; 2 \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

3

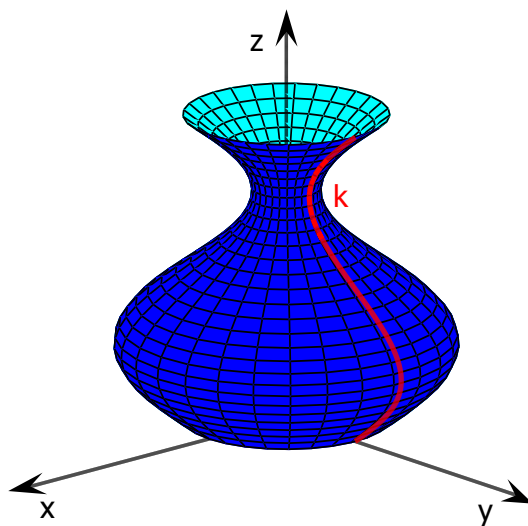
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [t \cdot \cos s; t \cdot \sin s; 3 \sin t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 55: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

4

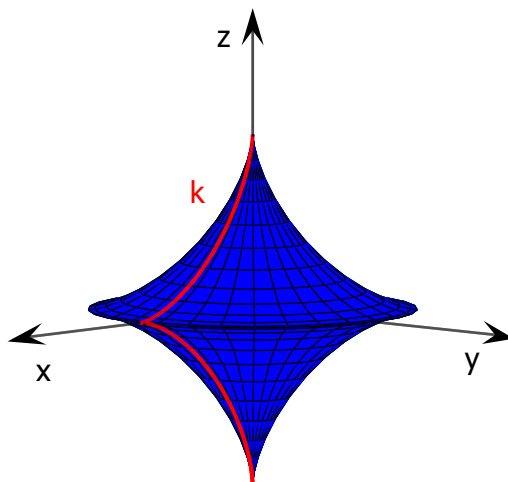
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [(2 \sin t + 3) \cdot \cos s; (2 \sin t + 3) \cdot \sin s; t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 56: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

5

Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [5 \cos^3 t \cdot \cos s; 5 \cos^3 t \cdot \sin s; 5 \sin^3 t]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; \pi \rangle$.

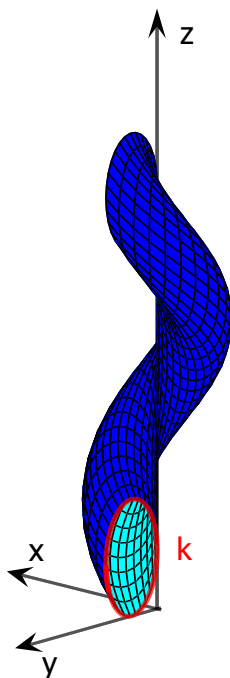


Obrázek 57: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Šroubové plochy

1

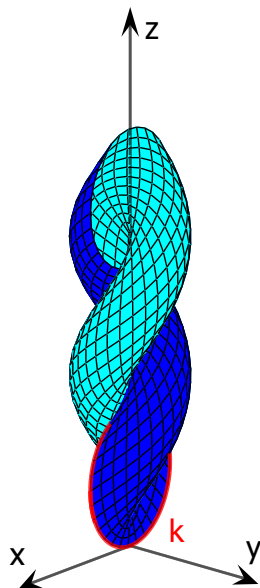
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [(2 + 2 \cos t) \sin s; (2 + 2 \cos t) \cos s; 3 + 3 \sin t + 3s]; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle; \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 58: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

2

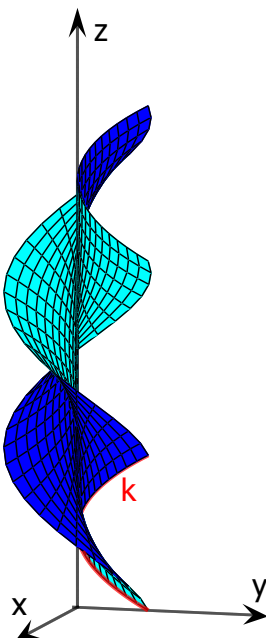
Parametrický popis plochy kadeře: $p(t, s) = \left[4 \cos t \cdot \cos s; 4 \cos t \cdot \sin s; 4 + 4 \sin t + \frac{8}{\pi} \cdot s \right];$
 $t \in \langle 0; 2\pi \rangle; s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$



Obrázek 59: Plocha kadeře pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle, s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

3

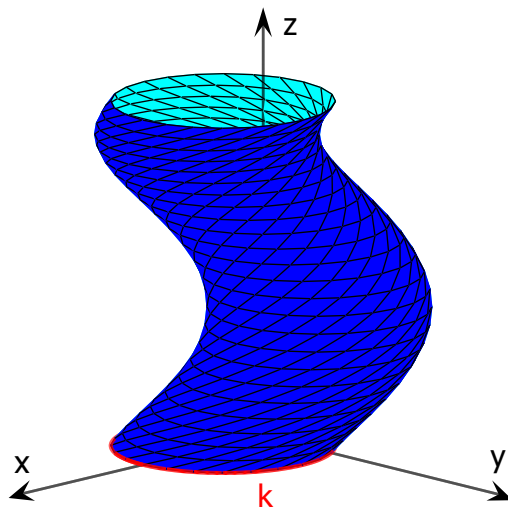
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = \left[\frac{t^2}{4} \cdot \sin s; \frac{t^2}{4} \cdot \cos s; t + 4 + \frac{9}{\pi} \cdot s \right];$ $t \in \langle -4; 4 \rangle; s \in \langle 0; 2\pi \rangle.$



Obrázek 60: Plocha pro $t \in \langle -4; 4 \rangle, s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

4

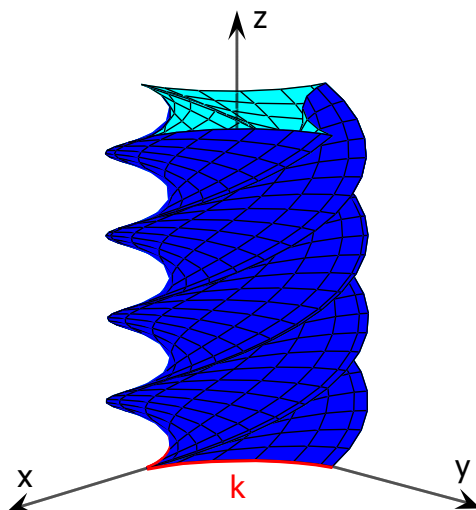
Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [(2 + 4 \cos t) \cos s - 4 \sin t \sin s; 4 \sin t \cos s + (2 + 4 \cos t) \sin s; 2s]$;
 $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$; $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 61: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

5

Parametrický popis plochy: $p(t, s) = [5 \cos^3 t \cos s - 5 \sin^3 t \sin s; 5 \sin^3 t \cos s + 5 \cos^3 t \sin s; \frac{6}{\pi} \cdot s]$;
 $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$; $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Obrázek 62: Plocha pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $s \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Použité zdroje

- [1] Ústav nosných konstrukcí, FA ČVUT.
URL <<http://15122.fa.cvut.cz/?page=cz,matematika-i>>
- [2] Benešová, L.: *Plochy ve světě kolem nás*. Diplomová práce, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, 2013.
URL <<https://otik.uk.zcu.cz/handle/11025/9837>>
- [3] Satrapa, P.: *L^AT_EX pro pragmatiky*. Technická univerzita v Liberci a sdružení CESNET, 2011, 87 s.
URL <<http://www.nti.tul.cz/~satrapa/docs/latex/>>
- [4] Surynková, P.: *Plochy stavební praxe*. Diplomová práce, Katedra didaktiky matematiky, MFF UK, 2006.
URL <<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/DGIIa/HtmlDGIIa/surynk.pdf>>