soubor FUNKCÍ

příručka pro studenty

Obsah

Poznámky

Pokyny k tisku:

- je důležité tisknout oboustranně a ve správném pořadí! Jinak nebudou funkce a jejich grafy navazovat.

1. varianta:

soubor → tisk → vlastnosti → zaškrtnout oboustranný tisk. Tiskárna sama vyzve k obrácení listů.

2. varianta:

soubor → tisk → tisknout:

~~všechny stránky ve výběru~~

liché stránky ✓

~~sudé stránky~~

Poté ručně otočit listy a změnit na tisk všech sudých stránek.

1. Určíme definiční obor Df

2. Vyšetříme, zda je funkce sudá nebo lichá; pokud ano, stačí se při výpočtech omezit na polovinu definičního oboru Df.
   Vyšetříme, zda je funkce periodická; pokud ano, stačí se při výpočtech omezit na jednu základní periodu definičního oboru.

3. Vypočítáme funkční hodnoty nebo limity funkce v krajních bodech intervalů definičního oboru Df; určíme svislé či vodorovné asymptoty grafu funkce.

4. Pokud je $0 \in Df$, určíme průsečík s osou y: [0,f(0)].
   Určíme průsečíky s osou x: [?,0] (řešíme rovnici f(x) = 0).

5. Vypočítáme první derivaci f′ a určíme Df′ (je podmnožinou Df). Vypočítáme derivace (popřípadě jednostranné derivace) funkce f v bodech z Df \ Df′.
   Určíme intervaly definičního oboru Df, ve kterých je funkce rostoucí či klesající (řešíme rovnici f′(x) = 0).
   Určíme lokální extrémy (a některé inflexní body).

6. Zjistíme, zda funkce má šikmé asymptoty u $(+\infty)$ nebo u $(-\infty)$.

7. Vypočítáme druhou derivaci f′′ a určíme Df′′. Určíme intervaly definičního oboru Df, ve kterých je funkce konvexní či konkávní (řešíme rovnici f′′(x) = 0).
   Určíme inflexní body a tečny v těchto bodech.

8. GRAF FUNKCE

9. Určíme globální extrémy.

lineární funkce

$\boxed{f(x) = ax+b}$ $\quad$ a ∈ R , b ∈ R

1. D(f) = R

2. je-li a = 0, je funkce f konstantní a sudá

je-li b = 0, je funkce f lichá

3.

$$\lim_{x\to-\infty}(ax+b) \begin{cases} +\infty & pro\ a<0 \\ b & pro\ a=0 \\ -\infty & pro\ a>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}(ax+b) \begin{cases} -\infty & pro\ a<0 \\ b & pro\ a=0 \\ +\infty & pro\ a>0 \end{cases}$$

4. průsečíky s osami:

s osou y $\quad [0, f(0)] = [0, b]$

s osou x $\quad \left[-\frac{b}{a}, 0\right]$ $\quad$ pro a ≠ 0

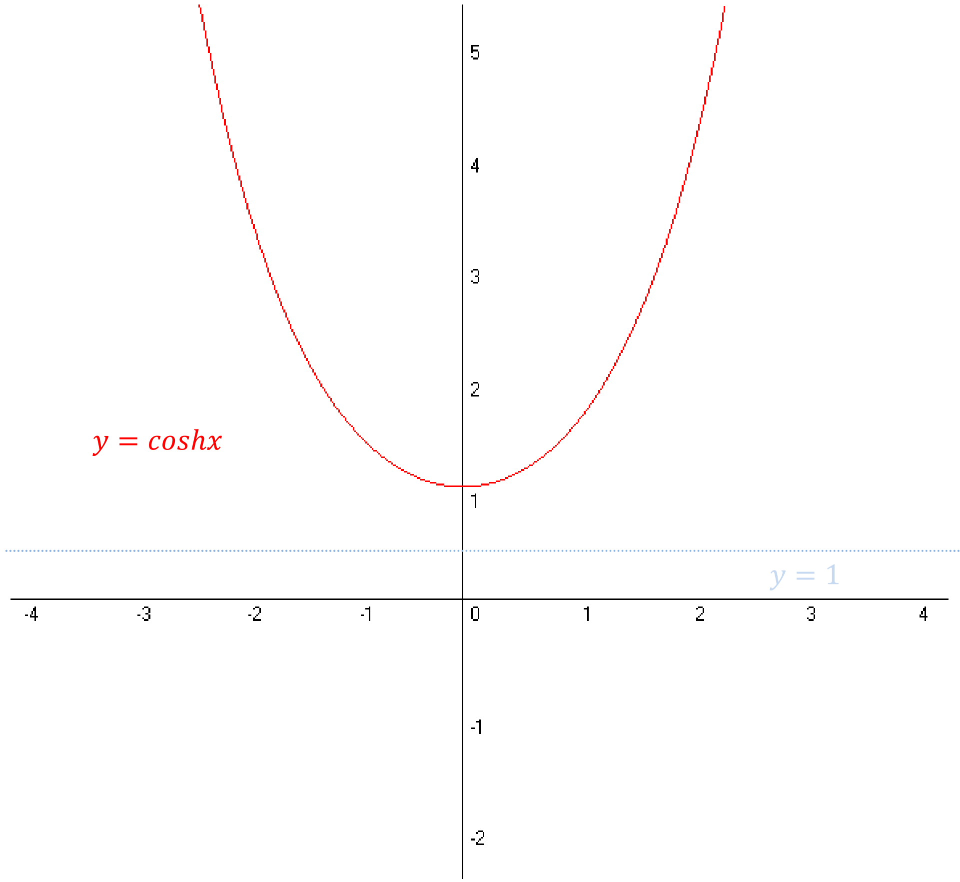
5. derivace funkce f´(x) = (ax+b)´= a

$pro\ a>0\ je\ f´(x)>0\ a$ je funkce rostoucí na $Df=R$

$pro\ a<0\ je\ f´(x)<0\ a$ je funkce klesající na $Df=R$

graf coshx

8.



f´(0) = 0

přímka *y = 1* je vodorovnou tečnou grafu funkce v bodě [0,1]

$\boxed{f(x) = \cosh x}$

$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

1. D(f) = R H(f) = $\langle 1, \infty)$

2. je sudá, není prostá

3. $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$ $\lim_{x\to\infty} \cosh x = +\infty$

5. f´(x) = sinhx

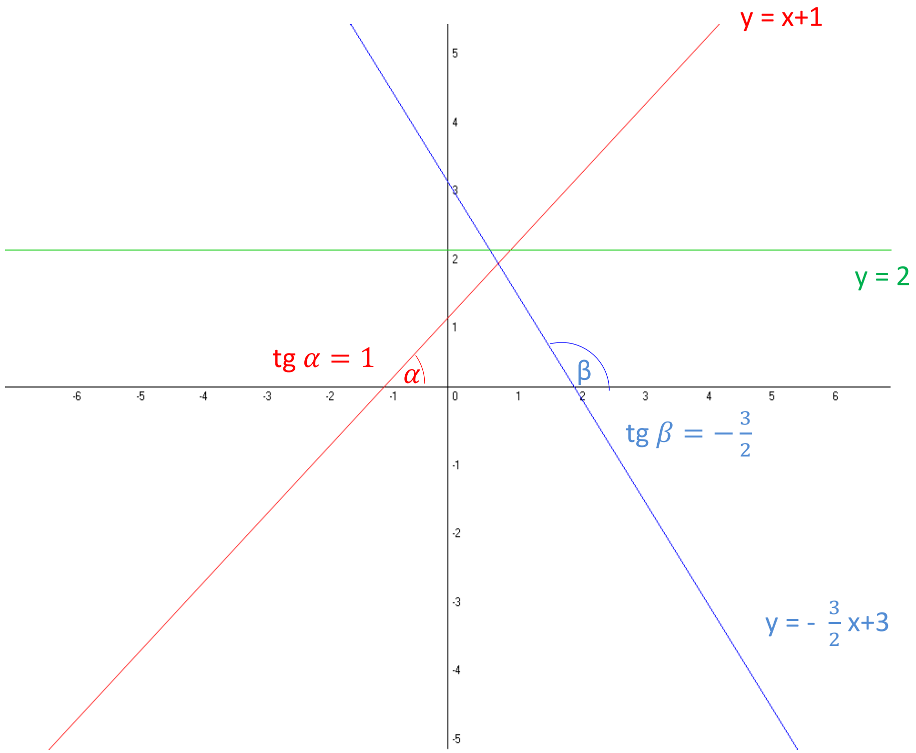
pro $x > 0$ je $f'(x) > 0$, fce je rostoucí na $\langle 0, \infty)$

pro $x < 0$ je $f'(x) < 0$, fce je klesající na $(-\infty, 0\rangle$

7. f´´(x) = coshx

pro $x \epsilon R$ je $f''(x) > 0$, fce je konvexní na R

8.



grafem lineární funkce je přímka *y = ax+b*.

číslo *a* je tzv. směrnice přímky , *a = tg* α .

mocninné funkce s přirozeným exponentem, sudým

$\boxed{f(x) = x^n}$ $n \in N$, sudé

př: $f(x) = x^2$

1. D(f) = R

2. je sudá, není prostá

3. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$ $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

5. $f'(x) = (x^2)' = 2x$, $x \in R$

pro $x > 0$ je $f'(x) > 0$, funkce je rostoucí na $\langle 0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f'(x) < 0$, funkce je klesající na $(-\infty, 0\rangle$

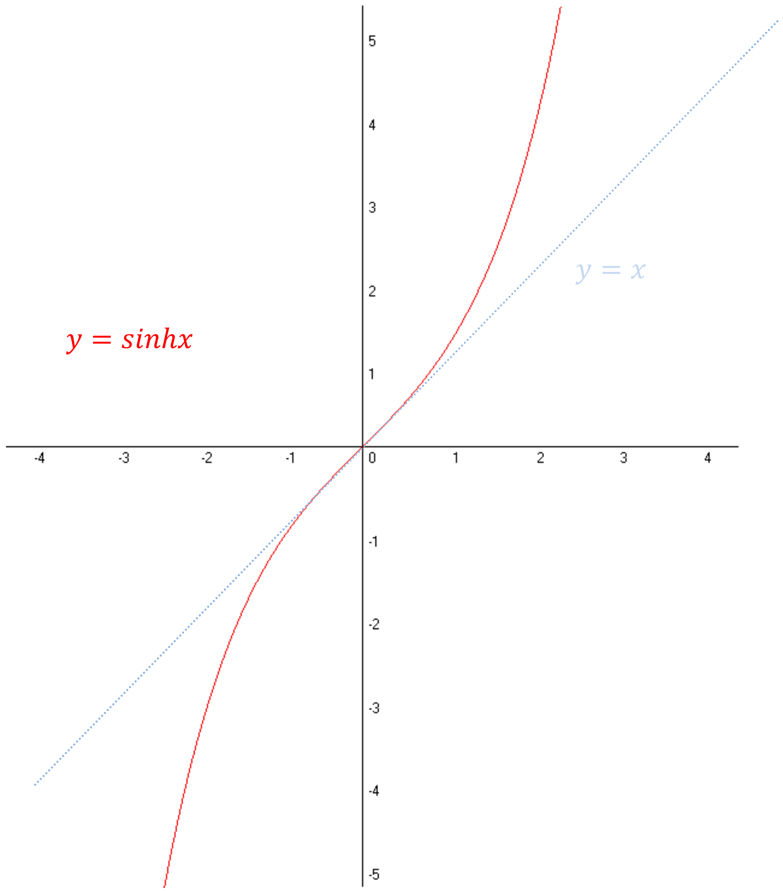
protože $f'(0) = 0$, přímka $y = 0$ je tečna grafu funkce v bodě [0,0]

7. $f''(x) = (2x)' = 2$, $x \in R$

pro $x \in R$ je $f''(x) > 0$, funkce je konvexní na R

graf sinhx

8.



$f'(0) = 1$

přímka $y = x$ je tečnou grafu funkce v bodě [0,0]

hyperbolický sinus

$\boxed{f(x) = \sinh x}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1 D(f) = R H(f) = R

2. je lichá, prostá

3. $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$

5. $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}.(-1)\right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (= \cosh x)$

pro $x \in$ R je $f'(x) > 0$, fce je rostoucí na R

7. $f''(x) = \sinh x$, $x \in$ R

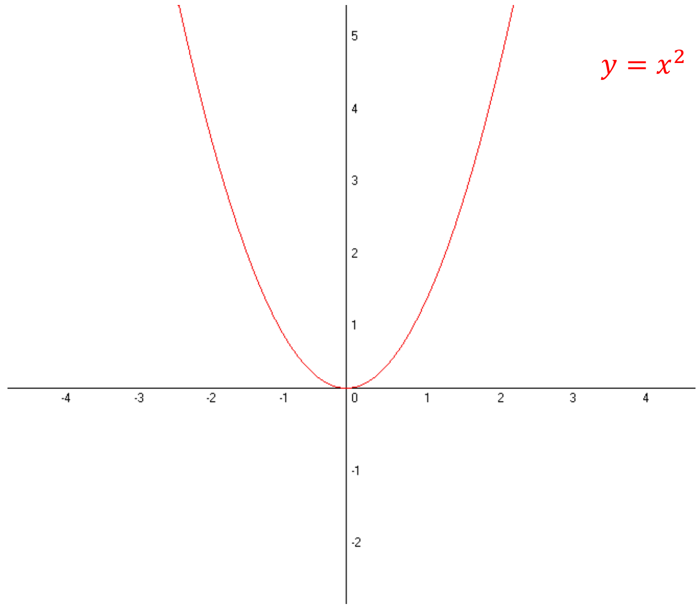
pro $x > 0$ je $f''(x) > 0$, fce je konvexní na $\langle 0, \infty)$

pro $x < 0$ je $f''(x) < 0$, fce je konkávní na $(-\infty, 0\rangle$

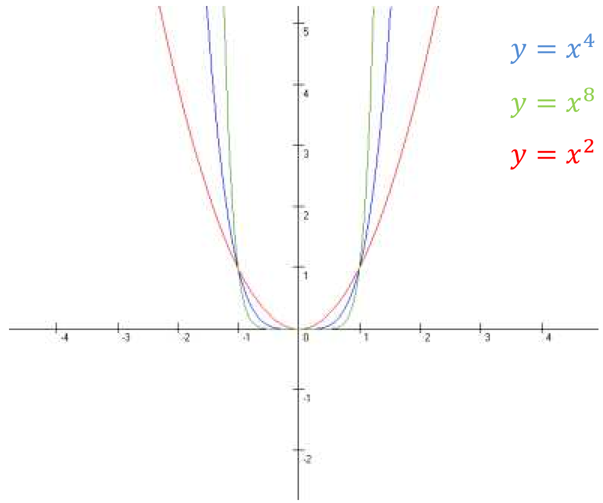
bod [0,0] je inflexní bod

graf x^2

8.



grafem funkce je parabola $y = x^2$, vrchol paraboly je bod [0,0], parametr $p = \frac{1}{2}$, ohnisko $F\left[\frac{1}{4}, 0\right]$, řídící přímka $d: y = -\frac{1}{4}$



$\boxed{f(x) = x^n}$ $n \epsilon N$, liché

př: $f(x) = x^3$

1. D(f) = R

2. je lichá, prostá

3. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

5. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, $x \epsilon R$

pro $x \epsilon$ R je $f'(x) \geq 0$, funkce je rostoucí na R

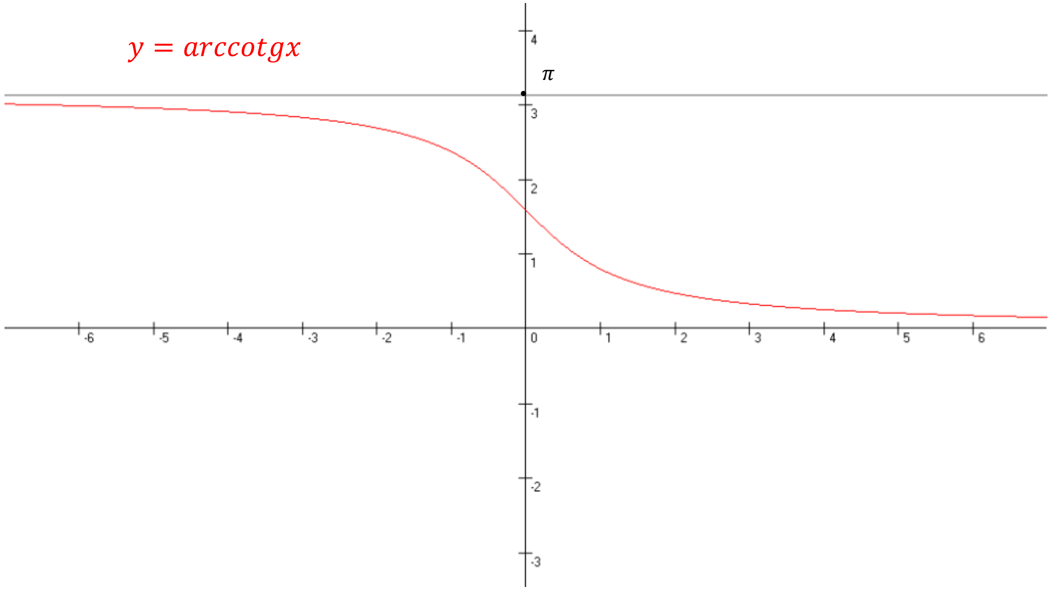
protože $f'(0) = 0$, přímka $y = 0$ je tečna grafu funkce v bodě $[0,0]$

7. $f''(x) = (3x^2)' = 6x$, $x \epsilon R$

pro $x > 0$ je $f''(x) > 0$, fce je konvexní na $\langle 0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f''(x) < 0$, fce je konkávní na $(-\infty, 0\rangle$

8.



$f(x) = \text{arccotg}x$

funkce co*tgx* je prostá na intervalu$(0, \pi)$, existuje k ní inverzní funkce a nazýváme ji arkuskotangens, značíme *arccotg*

1. D(f) = R H(f) = $(0, \pi)$

2. prostá

3. arccotg(0) = $\frac{\pi}{2}$ arccotg$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$= $\frac{2\pi}{3}$ arccotg(1)= $\frac{\pi}{4}$

arccotg$(-\sqrt{3})$ = $\frac{5\pi}{6}$ arccotg$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$= $\frac{\pi}{3}$

arccotg$(\sqrt{3})$ = $\frac{\pi}{6}$ arccotg(-1)= $\frac{3\pi}{4}$

$\lim_{x\to\infty} arccotgx = 0$ vodorovná asymptota u (+∞) y=0

$\lim_{x\to-\infty} arccotgx = \pi$ vodorovná asymptota u (-∞) y=π

5. f´(x) = (arccotgx)´= - $\frac{1}{1+x^2}$, xϵR

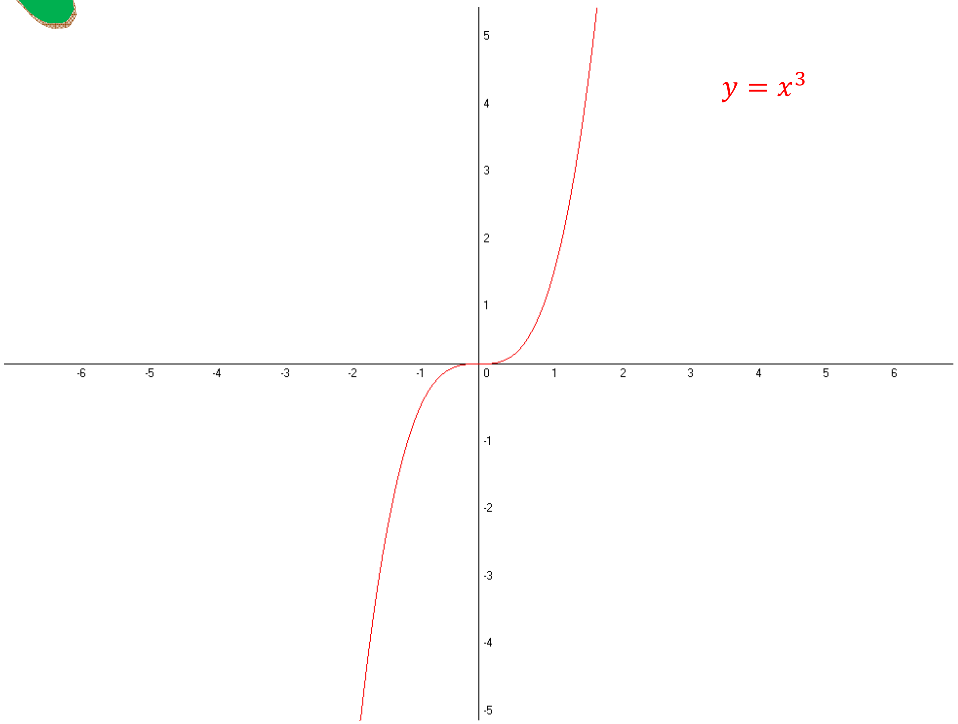
pro $x \epsilon$ R je f´$(x) < 0$, funkce je klesající na R

7. f´´(x) = $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, xϵR

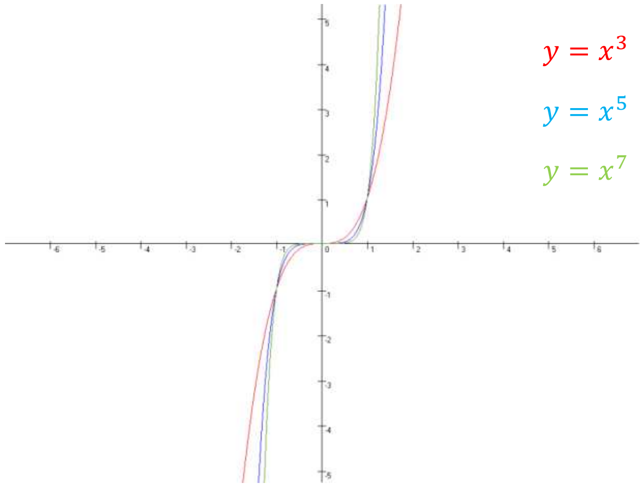
pro $x > 0$ je f´´$(x) > 0$, funkce je konvexní na $\langle 0, \infty)$

pro $x < 0$ je f´´$(x) < 0$, funkce je konkávní na $(-\infty, 0\rangle$

8.



grafem fce je tzv. *kubická parabola* $y = x^3$



mocninné s celým záporným exponentem, sudým

$$\boxed{f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

$n \in N$, sudé

př: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1. $D(f) = R - \{0\}$

2. je sudá, není prostá

3.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ vodorovná asymptota u (+∞) y=0

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ vodorovná asymptota u (-∞) y=0

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0_+} = +\infty$ svislá asymptota x=0

5. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $x \in Df$

pro $x > 0$ je $f'(x) < 0$, funkce je klesající na $(0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f'(x) > 0$, funkce je rostoucí na$(-\infty, 0)$

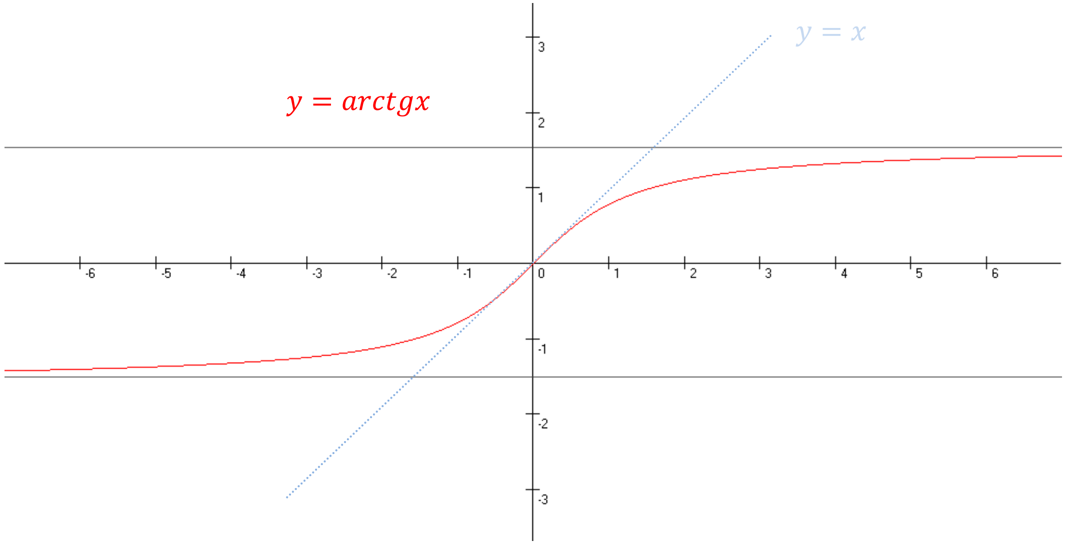
7. $f''(x) = \frac{6}{x^4}$, $x \in Df$

pro $x > 0$ je $f''(x) > 0$, funkce je konvexní na $(0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f''(x) > 0$, funkce je konvexní na $(-\infty, 0)$

graf arctgx

8.



$f'(0) = 1$

přímka $y = x$ je tečnou grafu funkce v bodě $[0,0]$

f(x) = arctgx

funkce *tgx* je prostá na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, existuje k ní inverzní funkce a nazýváme ji arkustangens, značíme *arctg*

1. D(f) = R H(f) = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2. je lichá a prostá

3. arctg(0) = 0 $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\lim_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$ vodorovná asymptota u +∞ y = $\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{-\pi}{2}$ vodorovná asymptota u −∞ y = -$\frac{\pi}{2}$

5. f´(x) = (arctgx)´= $\frac{1}{1+x^2}$, xϵR

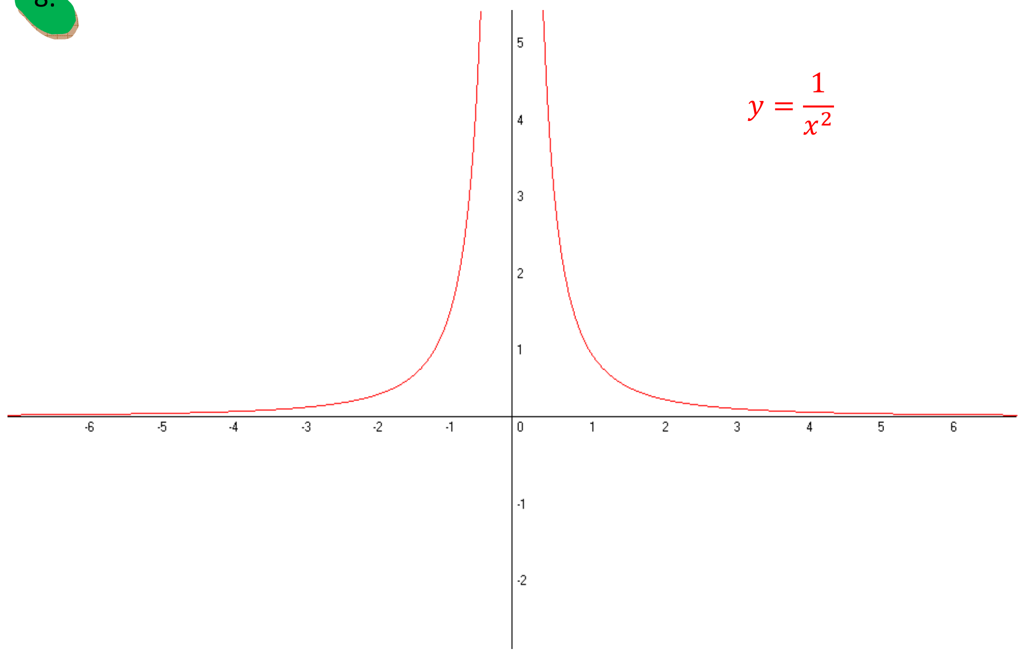
pro $x \,\epsilon$ R je f´(x) > 0 , fce je rostoucí na R

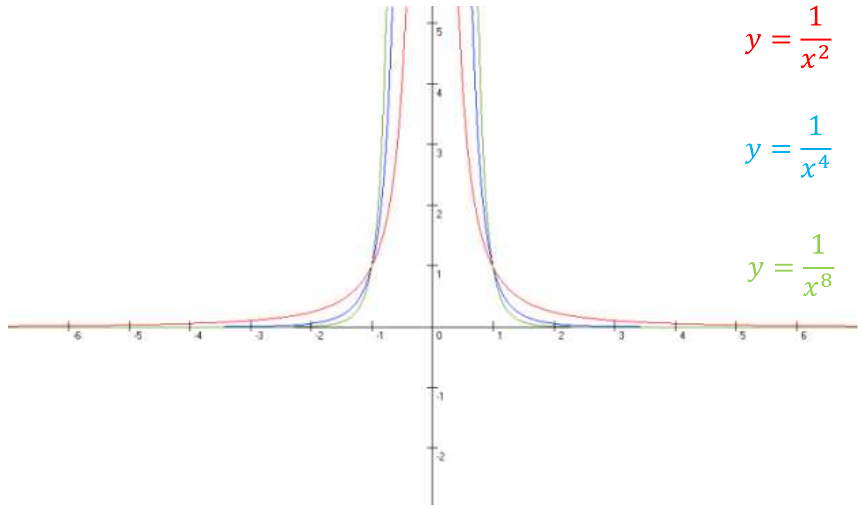
7. f´´(x) = $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, xϵR

pro $x > 0$ je f´´(x) < 0 , fce je konkávní na $\langle 0, \infty)$

pro $x < 0$ je f´´(x) > 0 , fce je konvexní na $(-\infty, 0\rangle$

8.





mocninné s celým záporným exponentem, lichým

$$\boxed{f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$ nϵN, liché

př: $f(x) = \frac{1}{x}$

1. D(f) = R - $\{0\}$

2. je lichá, je prostá

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$ vodorovná asymptota u (+∞): y=0

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$ vodorovná asymptota u (-∞): y=0

$\lim_{x\to0_-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$

$\lim_{x\to0_+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

oboustranná limita $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ neexistuje

svislá asymptota x=0

5. f´(x) = $-\frac{1}{x^2}$, xϵDf

pro $x > 0$ je $f´(x) < 0$, fce je klesající na $(0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f´(x) < 0$, fce je klesající na $(-\infty, 0)$

funkce není klesající na sjednocení intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$

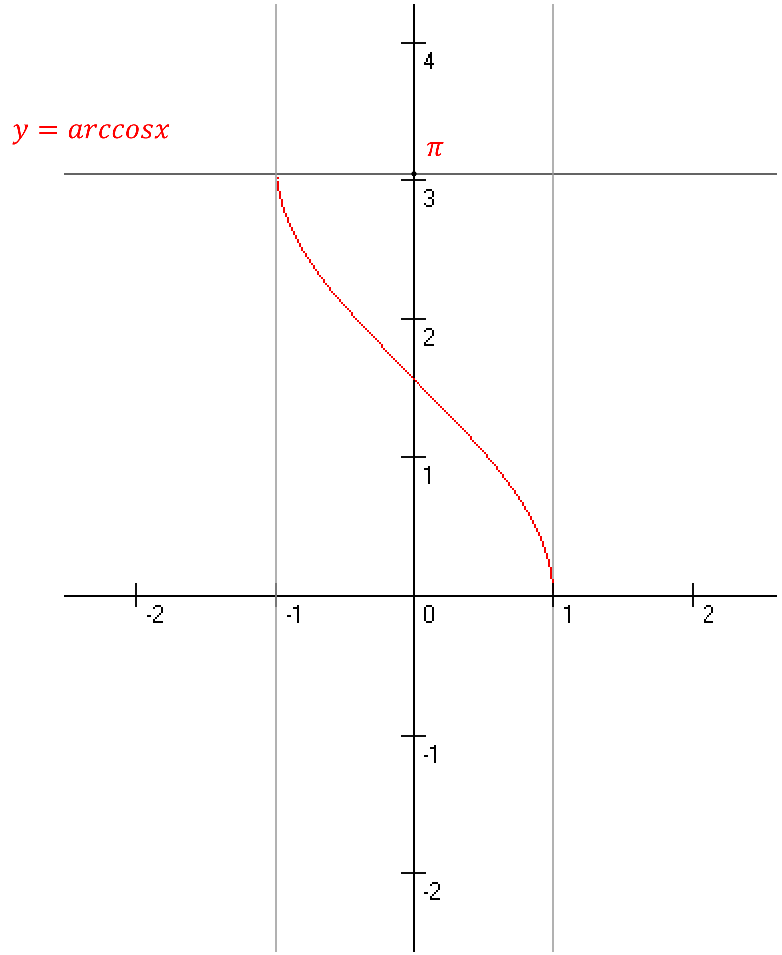
7. f´´(x) = $\frac{2}{x^3}$, xϵDf

pro $x > 0$ je $f´´(x) > 0$, fce je konvexní na $(0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f´´(x) < 0$, fce je konkávní na $(-\infty, 0)$

graf arccosx

8.



$\boxed{f(x) = \arccos x}$

funkce *cosx* je prostá na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, existuje k ní inverzní funkce a nazýváme ji arkuskosinus, značíme *arccos*

1. D(f) = $\langle -1; 1 \rangle$ H(f) = $\langle 0; \pi \rangle$

2. prostá

3.

arccos(0) = $\frac{\pi}{2}$ arccos$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ arccos$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

arccos(1) = 0 arccos$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ arccos$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

arccos(-1) = π arccos$\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ arccos$\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

5.

f´(x) = (arctgx)´= $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, x$\epsilon(-1,1)$

pro $x\ \epsilon\ (-1,1)$ je f´(x) < 0 , fce je klesající na $\langle -1,1 \rangle$

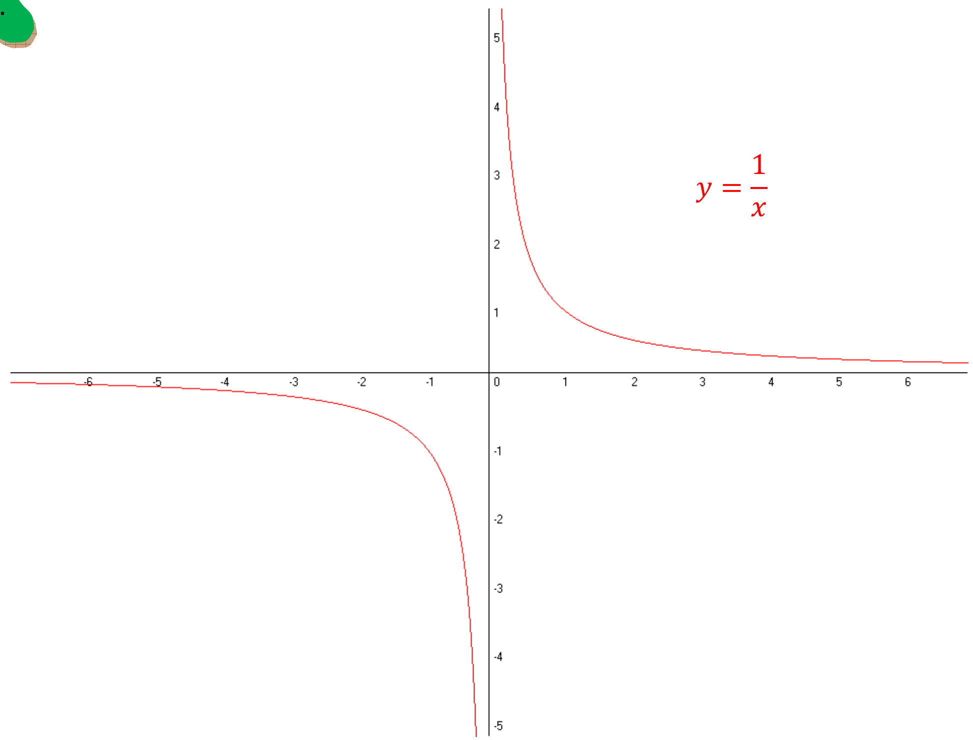
derivace funkce v bodě (-1) zprava:

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1_+} \frac{\arccos x - \arccos(-1)}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -1_+}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\infty$$

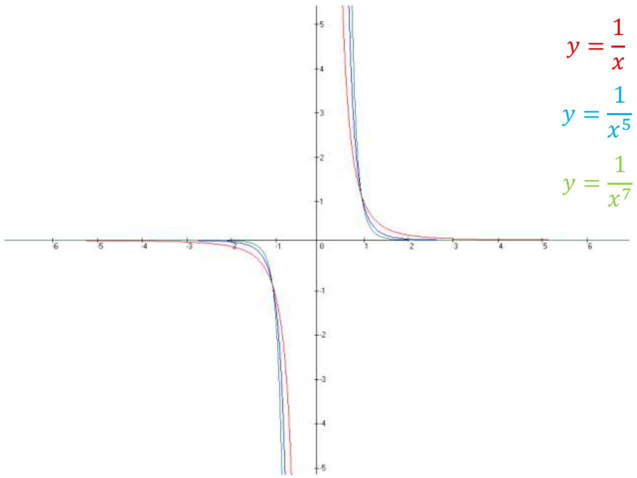
derivace funkce v bodě 1 zleva:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1_-} \frac{\arccos x - \arccos 1}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1_-}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\infty$$

8.



grafem funkce je rovnoosá hyperbola, velikost hlavní poloosy = velikost vedlejší poloosy = $\sqrt{2}$, hlavní osa y = x, vedlejší osa y = -x, excentricita e = 2, ohniska $E[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $F[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$



$$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$$

Základní kvadratická funkce $g(x) = x^2$ není prostá na Dg = R. Můžeme se ale omezit jen na část Df, např x^2 je prostá na intervalu $\langle 1, 10\rangle$, také na intervalu $\langle 0, \infty)$ a na intervalu $(-\infty, 0\rangle$.

Uvažujeme funkci $g(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, \infty)$. Na tomto intervalu je funkce *g* prostá, existuje k ní funkce inverzní a nazýváme ji druhá odmocnina, značíme $f(x) = g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

1. D(f) = $\langle 0; \infty)$

2. funkce není sudá ani lichá

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$

bod $[0, \sqrt{0}]$ = $[0, 0]$ je bod grafu

5. f´(x) = $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pro $x \epsilon (0, \infty)$

derivace zprava v bodě 0:

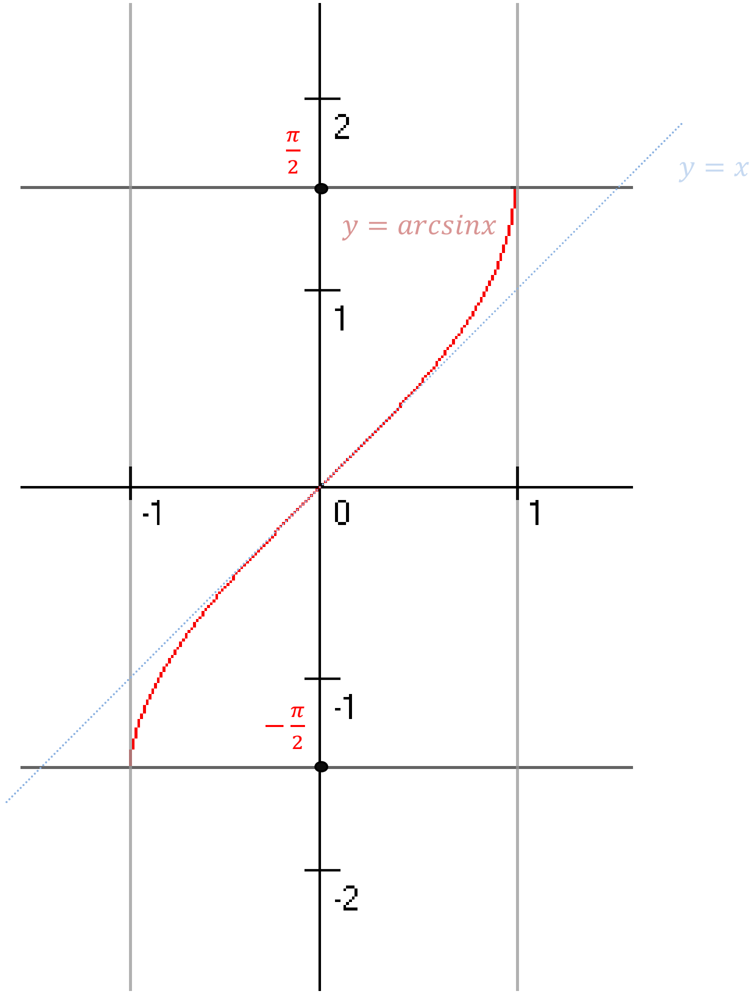
$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}\right) = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$

pro x>0 je f´(x)>0, funkce je rostoucí na $\langle 0, \infty)$

7. f´´(x) = $\left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) . x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} . \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $x \epsilon (0, \infty)$

pro $x > 0$ je $f''(x) < 0$, fce je konkávní na $\langle 0, +\infty)$

8.



f´(0) = 1

přímka *y = x* je tečna grafu funkce v bodě [0,0]

f(x) = arcsinx

funkce $sinx$ je prostá na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

existuje k ní inverzní funkce a nazýváme ji arkussinus, značíme $arcsin$

1. D(f) = $\langle -1; 1 \rangle$ Hf = $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

2. prostá, lichá

3. arcsin(0) = 0 arcsin $\left(-\frac{1}{2}\right)$ = $-\frac{\pi}{6}$ arcsin $\frac{1}{2}$ = $\frac{\pi}{6}$

arcsin(1) = $\frac{\pi}{2}$ arcsin $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ = $-\frac{\pi}{4}$ arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\frac{\pi}{4}$

arcsin(-1) = $-\frac{\pi}{2}$ arcsin $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ = $-\frac{\pi}{3}$ arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{\pi}{3}$

5. f´(x) = (arcsinx)´= $+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, xϵ $(-1,1)$

pro $x \ \epsilon \ (-1,1)$ je $f'(x) > 0$, fce je rostoucí na $\langle -1,1 \rangle$

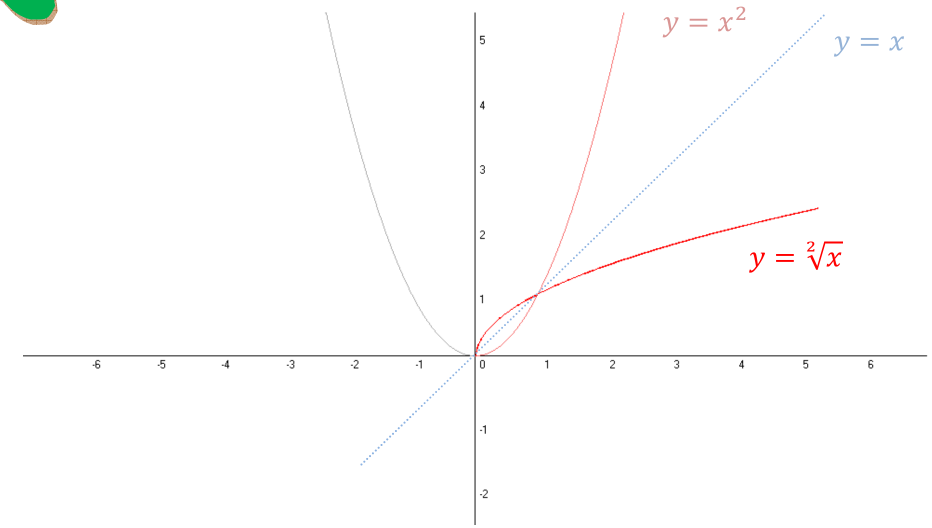
derivace funkce v bodě (-1) zprava:

7. $f'_{+}(-1) = \lim_{x\to -1_+} \frac{arcsinx - arcsin(-1)}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -1_+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$

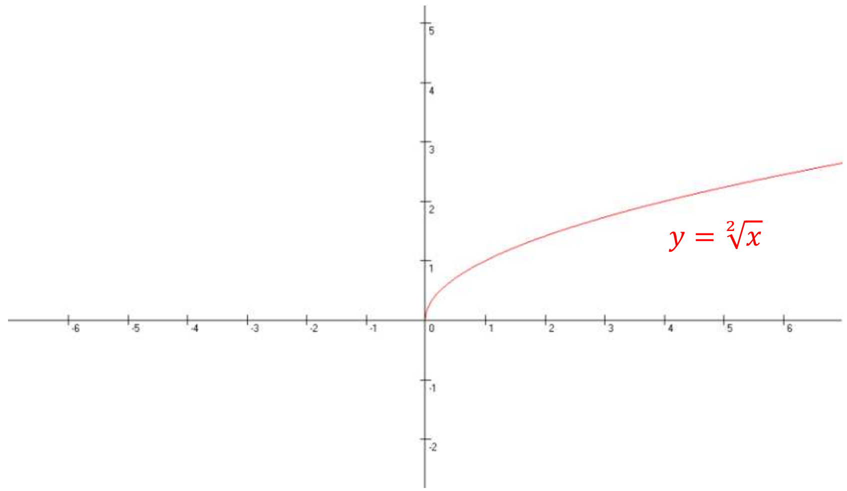
derivace funkce v bodě 1 zleva:

$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1_-} \frac{arcsinx - arcsin1}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1_-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$

8.



graf prosté funkce a graf funkce k ní inverzní jsou souměrné podle přímky *y* = *x*



grafem funkce druhá odmocnina je polovina paraboly

funkce třetí odmocnina

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x}}$$

třetí odmocnina je funkce inverzní k funkci x^3 na R

1. D(f) = R

2. lichá funkce

3. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$

5. $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pro $x \epsilon R - \{0\}$

derivace funkce v bodě 0 :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0_+} = \infty$$

protože $f'(0) = \infty$, přímka $x = 0$ je tečna grafu funkce v bodě $[0,0]$

funkce je rostoucí na R

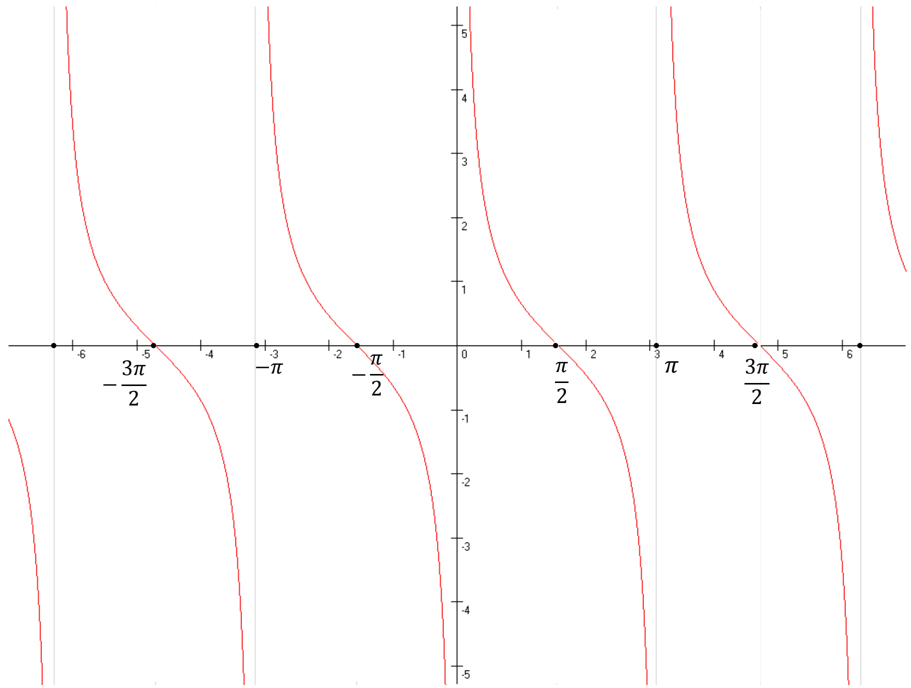
7. $f''(x) = \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right). x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} . \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $x \epsilon R - \{0\}$

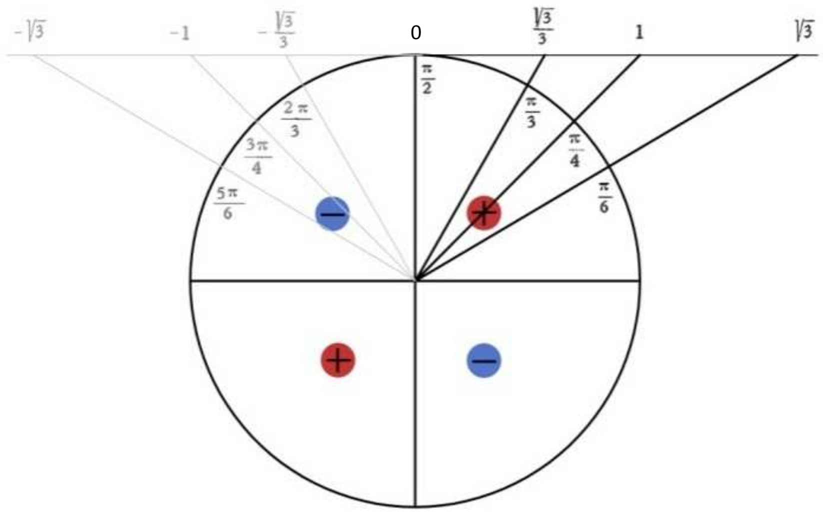
pro $x > 0$ je $f''(x) < 0$, fce je konkávní na $\langle 0, +\infty)$

pro $x < 0$ je $f''(x) > 0$, fce je konvexní na $(-\infty, 0\rangle$

graf cotgx

8.





f(x) = cotgx

$$cotgx = \frac{cosx}{sinx}$$

1. D(f) = $\bigcup_{k\epsilon Z}(k\pi, (k+1)\pi)$ Hf=$(-\infty; \infty)$

2. funkce je lichá, periodická; základní perioda π

vyšetřujeme na intervalu $(0, \pi)$

3. $\lim\limits_{x \to \pi-} cotgx = -\infty$ svislá asymptota $x = \pi$

$\lim\limits_{x \to 0+} cotgx = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0-} cotgx = -\infty$

oboustranná limita $\lim_{x \to 0} cotgx$ neexistuje

svislá asymptota $x = 0$

5. f´(x) = (cotgx)´= $-\frac{1}{sin^2x}$,Df´ = Df

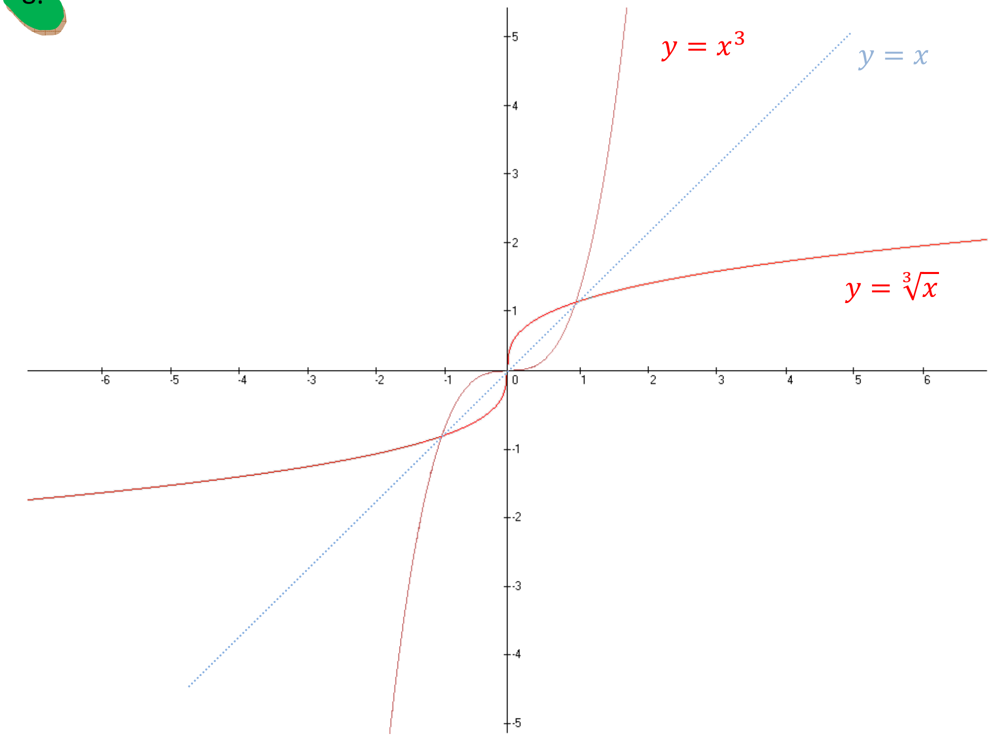
pro každé $x\epsilon(0, \pi)$ je f´(x) $<$ 0, funkce je klesající na $(0, \pi)$

7. f´´(x) = (tgx)´= $\frac{2cosx}{sin^3x}$, Df´´ = Df

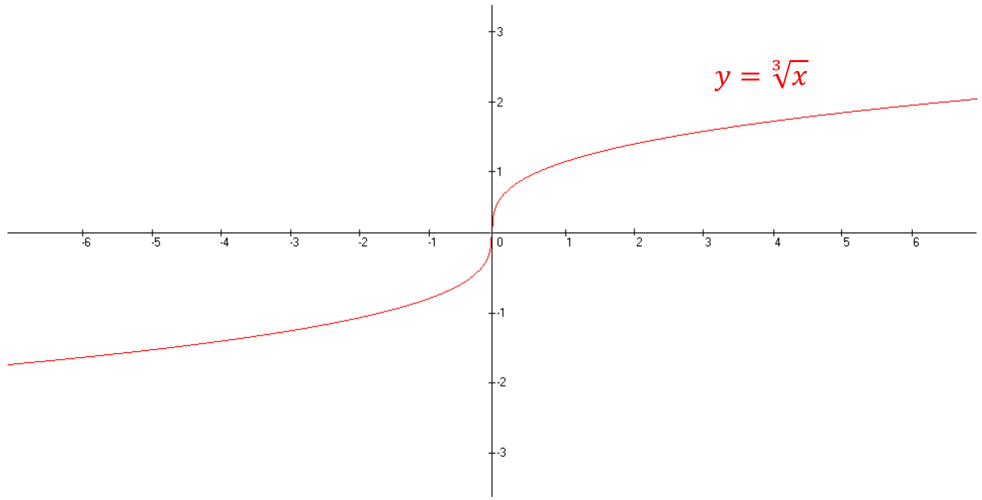
pro $x\epsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je f´´(x) $>$ 0, funkce je konvexní na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

pro $x\epsilon\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ je f´´(x) <0, funkce je konkávní na $\left\langle\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

8.



graf prosté funkce a graf funkce k ní inverzní jsou souměrné podle přímky y = x



$$\boxed{f(x) = e^x}$$

e je tzv. Eulerovo číslo

e je iracionální číslo (nelze vyjádřit zlomkem) a je *e = 2,7182818…*
(nemá ukončený periodický desetinný rozvoj)

průsečík grafu s osou y je $[0, e^0]$=[0,1]

1. D(f) =R

2. funkce není ani sudá ani lichá, je prostá

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ vodorovná asymptota u $(-\infty)$ $y = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$

5. f´(x) = e^x $x \epsilon R$

pro $x \epsilon R$ je f´(x)>0, funkce e^xje rostoucí na R

7. f´´(x) = e^x $x \epsilon R$

pro $x \epsilon R$ je f´´(x)>0, funkce e^xje konvexní.

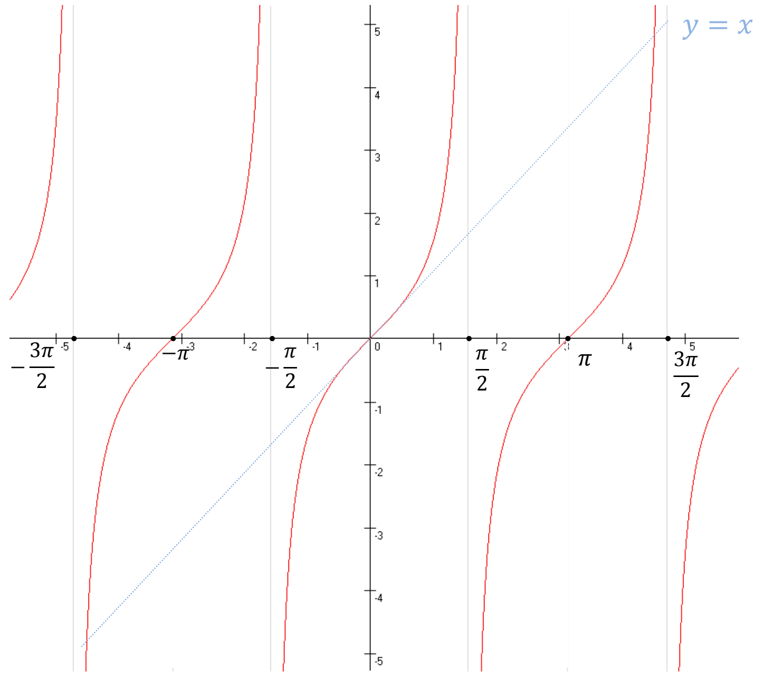
vzorce:

$$e^a . e^b = e^{a+b}$$

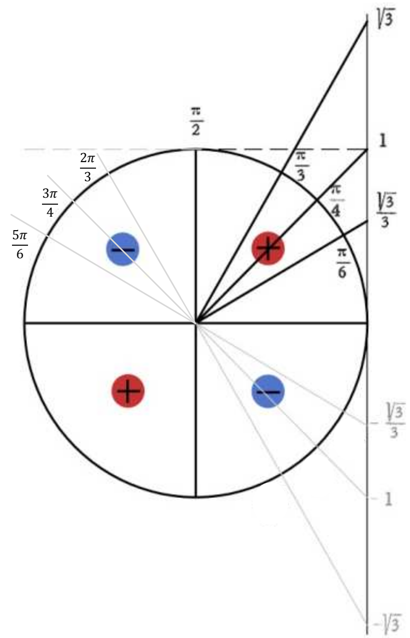
$$(e^a)^b = e^{a.b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

8.



f´(0) = 1 , přímka *y = x* je tečna ke grafu fce v bodě [0,0]



$\boxed{f(x) = tgx}$

$$tgx = \frac{sinx}{cosx}$$

1. D(f) $=\bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ Hf=$(-\infty; \infty)$

2. funkce je lichá, periodická; základní perioda π

vyšetřujeme na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} tgx = -\infty$ svislá asymptota $x = -\frac{\pi}{2}$

3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} tgx = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} tgx = -\infty\end{array}\right\}$ oboustranná limita $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx$ neexistuje

svislá asymptota $x = \frac{\pi}{2}$

5. f´(x) = (tgx)´= $\frac{1}{cos^2x}$, Df´ = Df

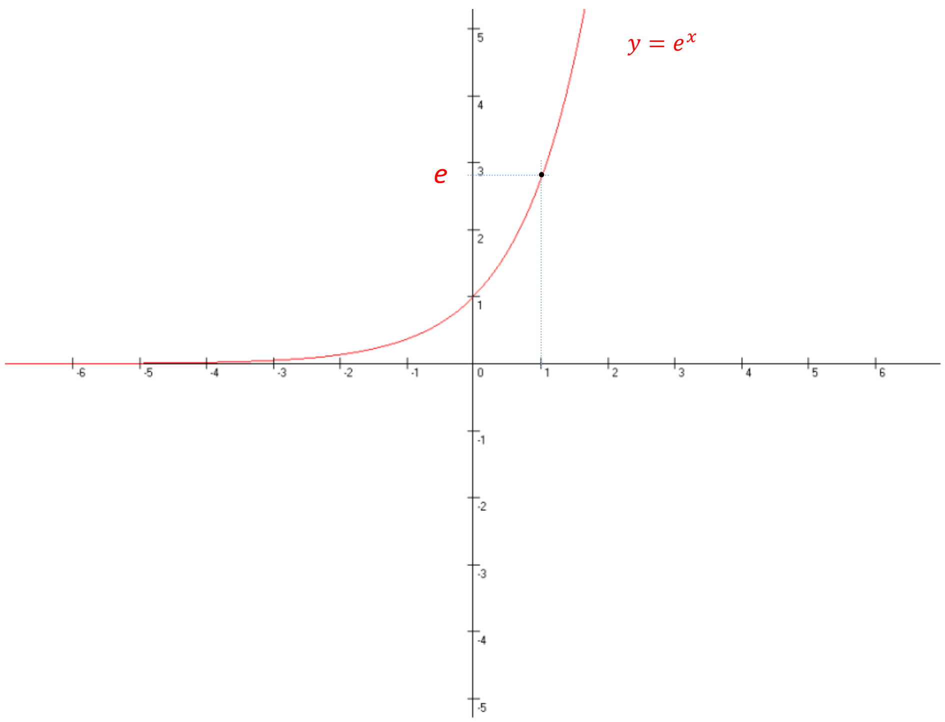
pro $x\epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je f´(x) >0, funkce je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

7. f´´(x) = (tgx)´= $\frac{2sinx}{cos^3x}$, Df´´ = Df

pro $x\epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je f´´(x) <0, funkce je konkávní na $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$

pro $x\epsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je f´´(x) >0, funkce je konvexní na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$

8.



$\boxed{f(x) = \ln x}$

funkce e^x je funkce prostá, existuje k ní funkce inverzní a je to tzv. *přirozený logaritmus*, logaritmus o základu *e*, značíme *lnx*

průsečík s osou x je $[1, ln1] = [1,0]$

bod $[e, lne] = [e, 1]$ je bod grafu

1. D(f) =(0,∞)

2. funkce není ani sudá ani lichá, je prostá

3. $\lim_{x\to 0_+} lnx = -\infty$ svislá asymptota x = 0

$\lim_{x\to\infty} lnx = +\infty$

5. f´(x) = $\frac{1}{x}$ $x\epsilon(0,+\infty)$

pro $x > 0$ je f´(x)>0, funkce lnx je rostoucí na $(0,+\infty)$

7. f´´(x) = $-\frac{1}{x^2}$ $x\epsilon R$

pro $x > 0$ je f´´(x)<0, funkce lnx je konkávní.

vzorce:

pro $a > 0, b > 0$

$$\ln(a.b) = lna + lnb$$

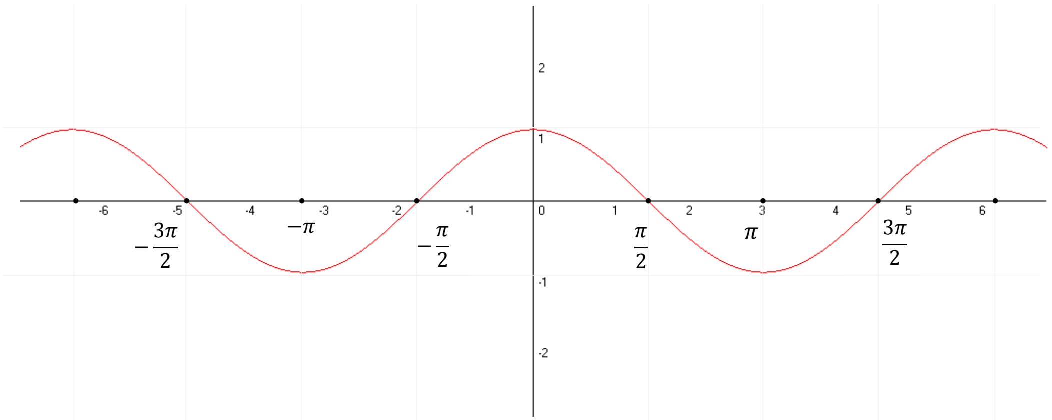
pro $a > 0$ a $p \neq 0$

$$ln(a)^p = p.lna$$

pro $a > 0, b > 0$

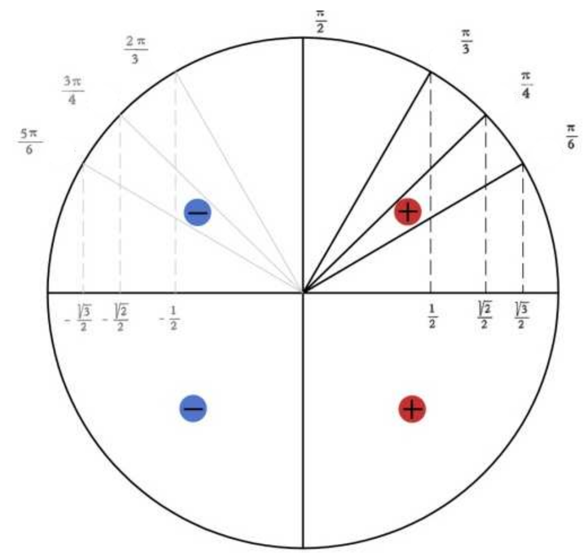
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$$

8.



f´(0) = f´(2π) = 0 , přímka y = 1 je vodorovná tečna grafu fce v bodech $[2k\pi, 1]$

f´(π) = 0 , přímka y = -1 je vodorovná tečna grafu funkce v bodech $[\pi + 2k\pi, -1]$



funkce goniometrické, cosx

f(x) = cosx

1. Df = R $\qquad$ Hf=$\langle -1; 1\rangle$

2. sudá, periodická; základní perioda 2π
vyšetřujeme na $\langle 0{,}2\pi\rangle$

4. průsečíky s osou x: $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 0\right]$

5. f´(x) = (cosx)´= -sinx , xϵR

pro $x\ \epsilon\ \langle \pi, 2\pi\rangle$ je $f'(x) \geq 0$, fce je rostoucí na $\langle \pi, 2\pi\rangle$

pro $x\ \epsilon\ \langle 0, \pi\rangle$ je $f'(x) \leq 0$, fce je klesající na $\langle 0, \pi\rangle$

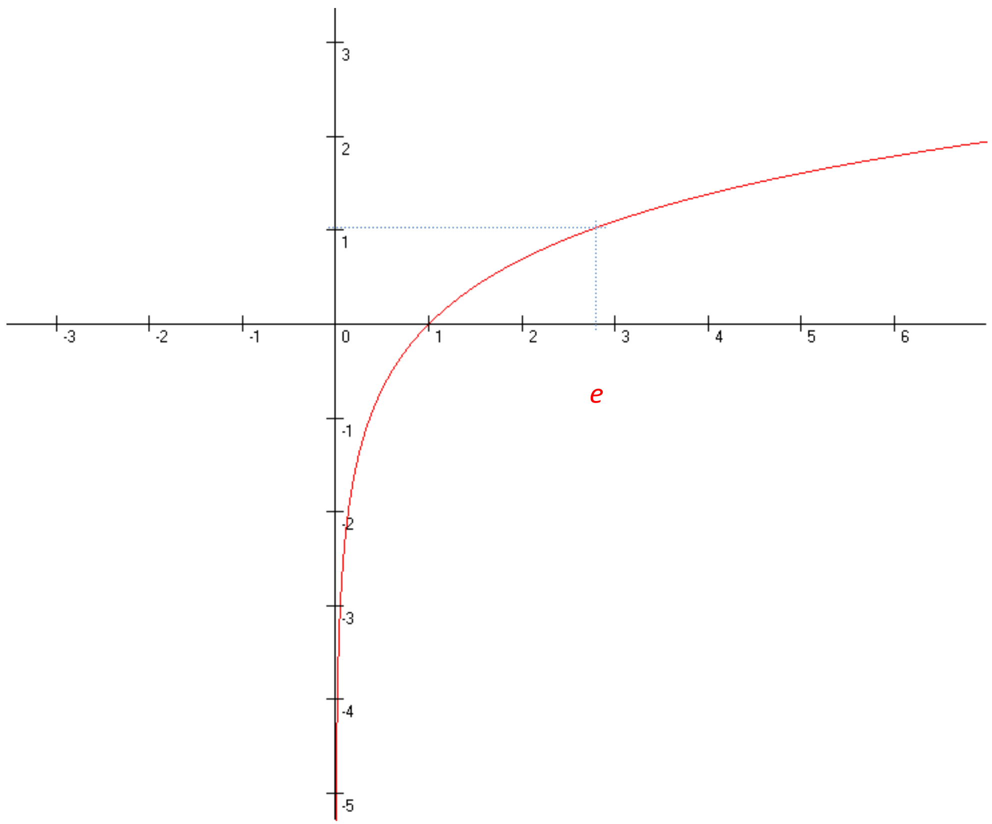
7. f´´(x) = -cosx , xϵR

pro $x\ \epsilon\ \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a pro $x\epsilon\ \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$ je $f''(x) \leq 0$, funkce je na intervalech $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a $\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$ konkávní

pro $x\epsilon\ \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$ je $f''(x) \geq 0$, funkce je na $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$ konvexní

graf lnx

8.



exponenciální se základem $a \in (1, +\infty)$

$\boxed{f(x) = a^x}$ a $\in (1, \infty)$

př: $f(x) = 2^x$

každá exponenciální funkce je prostá, k funkci a^x existuje inverzní funkce a je to logaritmus o základu a, značíme $\log_a x$

každý logaritmus lze přepsat pomocí přirozeného logaritmu $\log_a x = \frac{lnx}{lna}$, $x > 0, a\epsilon(0,1) \cup (1, \infty)$

1. D(f) =R

2. funkce není ani sudá ani lichá

3. $\lim_{x \to -\infty} (2)^x = 0$ vodorovná asymptota u $(-\infty)$: $y = 0$

$\lim_{x \to \infty} (2)^x = +\infty$

5. f´(x) = $(2^x)´$= $2^x . ln2$ $x\epsilon R$

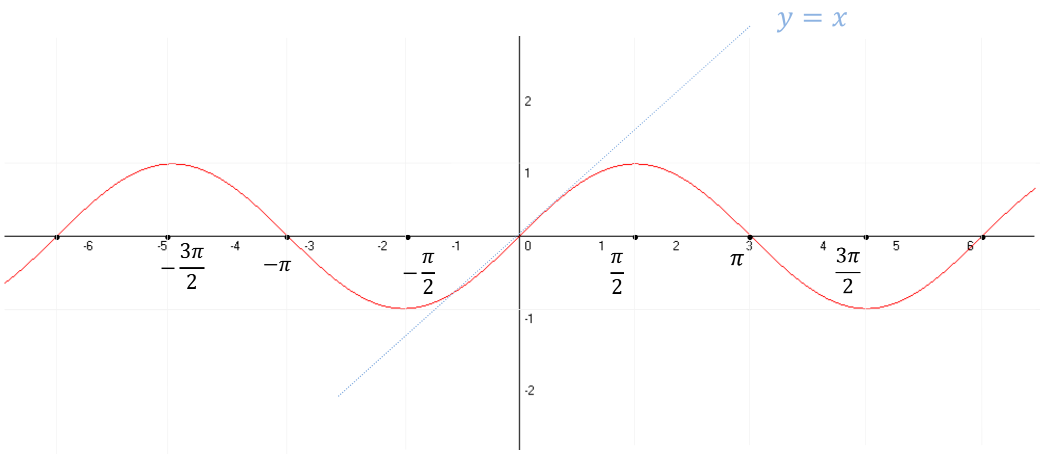
pro $x\epsilon R$ je f´(x)>0, funkce 2^xje rostoucí na R

7. f´´(x) = $(2^x)´$= $2^x . (ln2)^2$ $x\epsilon R$

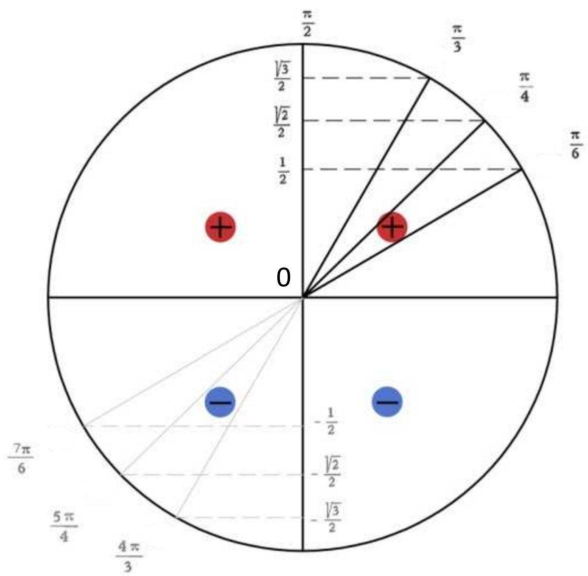
pro $x\epsilon R$ je f´´(x)>0, funkce $(2)^x$je konvexní

graf sinx

8.



f´(0) = 1, přímka y = x je tečna grafu funkce v bodě [0,0]



funkce goniometrické, sinx

$f(x) = \sin x$

1. Df = R Hf=$\langle -1; 1\rangle$

2. lichá, periodická; základní perioda 2π

4. průsečíky s osou x: $[k\pi, 0], k \epsilon Z$

5. f´(x) = (sinx)´= $\cos x$, xϵR

funkce je rostoucí na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$,

klesající na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, kϵZ

7. f´´(x) = $-\sin x$, xϵR

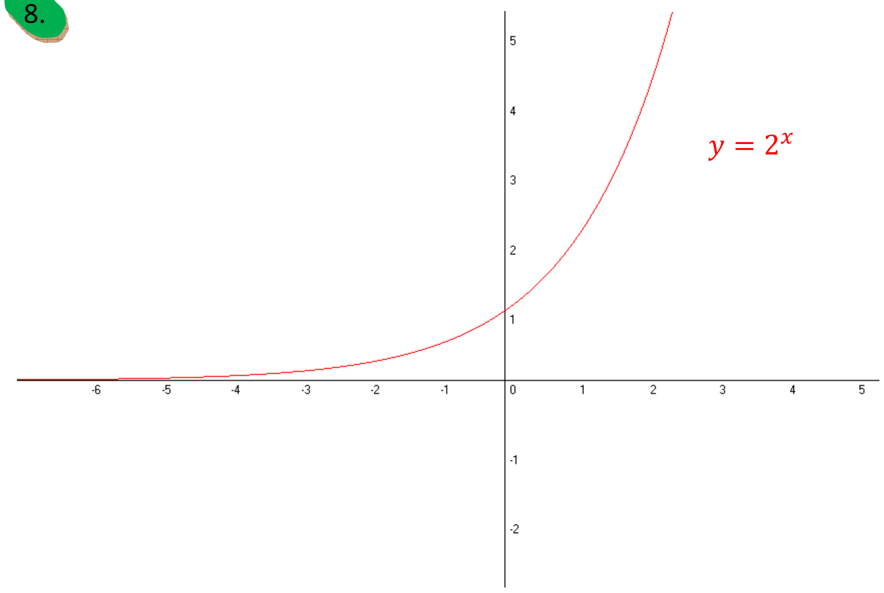
funkce je konvexní na $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi\rangle$ a

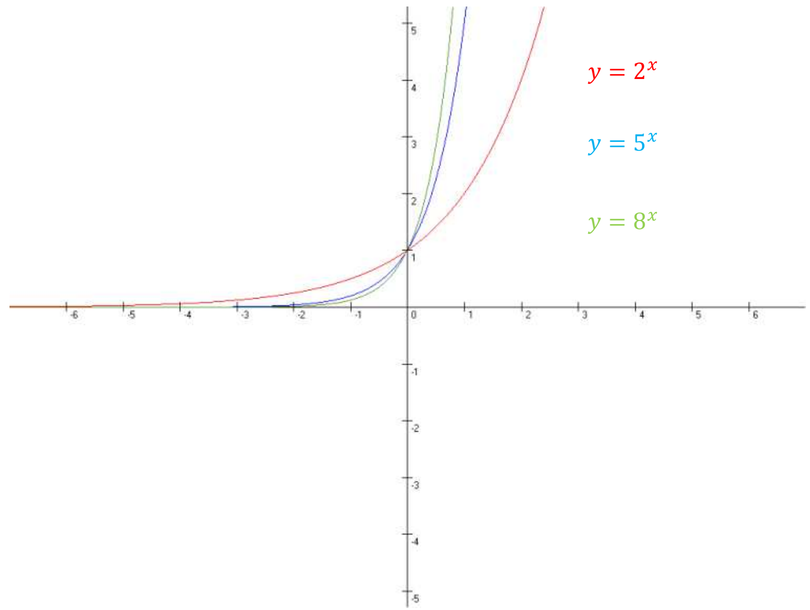
konkávní na $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$, kϵZ

body $[k\pi, 0]$ jsou inflexní body

graf a^x, $a \epsilon (1, \infty)$

8.





$$\boxed{f(x) = a^x}$$

a $\in (0,1)$

př: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

každá exponenciální funkce je prostá, k funkci a^x existuje inverzní funkce a je to logaritmus o základu a, značíme $\log_a x$

každý logaritmus lze přepsat pomocí přirozeného logaritmu $\log_a x = \frac{lnx}{lna}$, $x > 0, a\epsilon(0,1) \cup (1,\infty)$

1. D(f) =R

2. funkce není ani sudá ani lichá

3. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ vodorovná asymptota u $(+\infty)$: $y = 0$

5. $f'(x) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)^x ln\frac{1}{2}$, $x\epsilon R$

pro $x\epsilon R$ je f´(x)<0, funkce $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ je klesající na R

7. $f''(x) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)^x . \left(ln\frac{1}{2}\right)^2$, $x\epsilon R$

pro $x\epsilon R$ je f´´(x)>0, funkce $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ je konvexní na R

8.