VZORCE

Úpravy výrazů.

$$A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B} \qquad \frac{1}{A - B} = \frac{A + B}{A^2 - B^2}$$

$$A + B = \frac{A^2 - B^2}{A - B} \qquad \frac{1}{A + B} = \frac{A - B}{A^2 - B^2}$$

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2} \qquad A + B = \frac{A^3 + B^3}{A^2 - AB + B^2}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$\sqrt{x^2} = x$ **pouze** pro $x \geqq 0$

Logaritmy.

$\ln(x) = y$ je pro $x > 0$ definováno pomocí rovnosti $e^y = x$

$$\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B) \qquad \ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\ln(A)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B) \qquad \ln\left(\frac{A}{B}\right) = -\ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\ln(A^k) = k \cdot \ln(A) \qquad A^B = e^{B \cdot \ln(A)}$$

Goniometrické funkce.

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x) = -\sin(-x) = \sin(2\pi + x)$$

$$\cos(x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(2\pi + x)$$

$$\mathrm{tg}\,(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,(x)}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$
$$\operatorname{tg}(x) = -\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg}(\pi + x) = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$
$$\operatorname{cotg}(x) = -\operatorname{cotg}(-x) = \operatorname{cotg}(\pi + x) = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Cyklometrické funkce.

$$\arcsin(x) = y \text{ pokud } y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \text{ a } \sin(y) = x$$
$$\arccos(x) = y \text{ pokud } y \in \langle 0; \pi\rangle \text{ a } \cos(y) = x$$
$$\operatorname{arctg}(x) = y \text{ pokud } y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \text{ a } \operatorname{tg}(y) = x$$
$$\operatorname{arccotg}(x) = y \text{ pokud } y \in (0; \pi) \text{ a } \operatorname{cotg}(y) = x$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$$
$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg}(x)$$
$$\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arctg}(1/x) \text{ pro } x > 0$$

Limity.

Neurčité ("problémové") výrazy : $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, 1^{∞}, $1^{-\infty}$, ∞^0, 0^0.

"Bezproblémové" výrazy : $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0+} = \infty$, $\frac{1}{0-} = -\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $1^0 = 1$, $\infty^{\infty} = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$, $(0+)^{\infty} = 0$, $(0+)^{-\infty} = \infty$, $\frac{\infty}{0+} = \infty \cdot \frac{1}{0+} = \infty$, $\frac{\infty}{0-} = \infty \cdot \frac{1}{0-} = -\infty$, $5 \cdot \infty = \infty$, $(-5) \cdot \infty = -\infty$, $\sqrt{\infty} = \infty$, $\sqrt[3]{\infty} = \infty$, $\sqrt[3]{-\infty} = -\infty$, ...

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$
$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) - g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \qquad \lim_{x\to a}\Big(\alpha \cdot f(x)\Big) = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$
$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)} \qquad \lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \sin\big(f(x)\big) = \sin\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

podobně pro funkce $\cos, \arcsin, a^x, ...$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \quad \dots \quad = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln^\beta x = 0 \text{ pro všechna } \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

pro $a > 0$ platí: $$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pokud } a > 1 \\ 0 & \text{pokud } a < 1 \end{cases}$$

Věta o policajtech: Pokud je splněno $g \leqq f \leqq h$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, tak $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Derivace.

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$(\alpha\cdot f)' = \alpha\cdot f' \qquad \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x)' = 1$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\text{číslo})' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Průběh funkce.

(1) Definiční obor
(2) Sudá, lichá, periodická
(3) Limity v krajních bodech definičního oboru
(4) 1. derivace
(5) Podezřelé body na extrém: buď $f'(x)$ není definováno nebo $f'(x) = 0$
(6) Tabulka pro 1. derivaci
(7) 2. derivace
(8) Podezřelé body na inflexi: buď $f''(x)$ není definováno nebo $f''(x) = 0$
(9) Tabulka pro 2. derivaci
(10) Funkční hodnoty v podezřelých bodech, popř. průsečíky s osami x, y
(11) Asymptoty
(12) Graf

`Sudá funkce`: $f(-x) = f(x)$, $D(f)$ je symetrický podle 0, graf je symetrický podle osy y. Stačí vyšetřovat $x \geqq 0$.
`Lichá funkce`: $f(-x) = -f(x)$, $D(f)$ je symetrický podle 0, graf je symetrický podle počátku (bodu [0;0]). Stačí vyšetřovat $x \geqq 0$.

`Svislá asymptota`: Existuje, pokud v nějakém bodě a je $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$. Rovnice asymptoty je potom $x = a$.

`Vodorovná asymptota` (v $+\infty$): Existuje, pokud $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \neq \pm\infty$. Rovnice asymptoty je potom $y = b$.
`Vodorovná asymptota` (v $-\infty$): Existuje, pokud $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \neq \pm\infty$. Rovnice asymptoty je potom $y = b$.

`Šikmá asymptota` (v $+\infty$): Existuje jen když neexistuje vodorovná asymptota; navíc musí existovat následující dvě limity:

$$k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad q := \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - k\cdot x\big).$$

Je-li $k \neq \pm\infty$, $q \neq \pm\infty$, je rovnice asymptoty $y = kx + q$.
Podobně pro šikmou asymptotu v $-\infty$.

`Tečna ke grafu funkce` f (`v bodě` x_0): Existuje vždy když v bodě x_0 existuje první derivace. Rovnice asymptoty je potom

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$